

21. Considera as seguintes sucessões: $c_n = 3n + (-1)^n$ e $d_n = 3(-1)^n$

21.1. Calcula os cinco primeiros termos de cada uma das sucessões.

21.2. Mostra que (c_n) é monótona e (d_n) não é monótona

21.3. Indica dois minorantes de (c_n)

21.4. Justifica que as duas sucessões não são limitadas

22. O número de pontos de cada uma das figuras seguintes define cada um dos 3 primeiros termos de uma sucessão



22.1. Supondo que o processo de construção das figuras se mantém, determina o termo de ordem 6 e de ordem 10

22.2. Justifica que a sucessão é crescente e não limitada

23. Seja a sucessão definida da seguinte forma: $v_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{1}{n-1} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

23.1. Determina os seis primeiros termos da sucessão

23.2. Estuda a sucessão quanto a monotonia e verifica se é ou não limitada

24. Classifica quanto à monotonia as sucessões de termo geral:

24.1. $a_n = \frac{n+2}{n+1}$

24.2. $b_n = \frac{3n+2}{n+3}$

24.3. $c_n = (-1)^n 5n$

25. Considera a seguinte sucessão de termo geral: $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$

25.1. Escreve o termo de ordem $n+1$

25.2. Será 0,98 termo da sucessão? Justifica a resposta.

25.3 Estuda a monotonia da sucessão

26. Dada a sucessão (u_n) de termo geral: $u_n = \frac{n+7}{n+1}$

26.1. Averigua se $-\frac{1}{3}$ é termo da sucessão

26.2. Determina a ordem depois da qual: $u_n < \frac{6}{5}$



Conteúdos

Sucessões e Infinito

Infinitamente grandes

Infinitesimos

Limite de uma sucessão

Propriedades das sucessões convergentes

Soma de todos os termos de uma progressão geométrica

Método de indução matemática

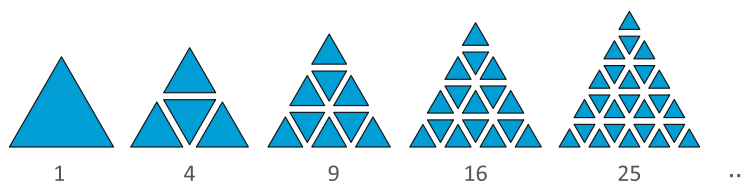
Subtema 2 - Limites infinitos

A partir do momento em que compreendemos o processo de divisão dos triângulos, podemos imaginar a continuação da sequência e sabemos sempre qual é a figura que vem a seguir.

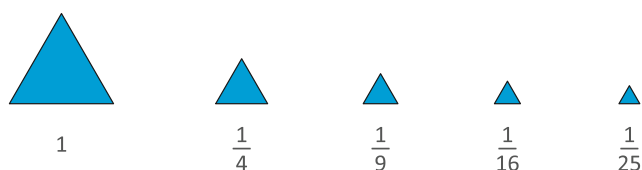


A esta sequência de figuras podemos associar varias sucessões numéricas:

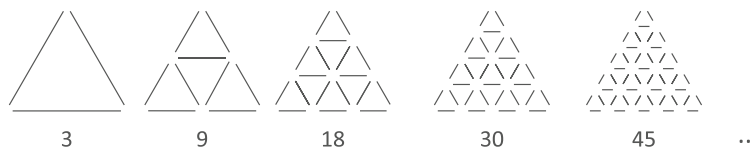
- A sucessão do número de triângulos de cada figura



- A sucessão da medida da área de cada triângulo



- A sucessão do número de segmentos de cada figura



Em qualquer dos casos podemos repetir o processo de forma infinita.

Para ajudar a explicar o conceito de infinito, Hilbert enunciou um paradoxo conhecido como o *Hotel Infinito de Hilbert*

Paradoxo do Hotel de Hilbert:

Existe um Hotel com um infinito número de quartos, todos ocupados. Chega um novo hóspede para se acomodar num quarto. Será que ele tem lugar no hotel?

Se o hotel tivesse um número finito de quartos, o hóspede não teria lugar disponível. Mas, um hotel com infinitos quartos pode sempre receber mais gente, mesmo se o hotel estiver cheio.

Por exemplo, se os infinitos quartos já estiverem cheios com infinitos hóspedes e chega um novo hóspede, pede-se aos outros hóspedes que se mudem para o quarto que tem o número imediatamente superior ao seu: o hóspede do quarto 1 vai para o quarto 2, o do quarto nº 2 para o quarto nº 3 e assim sucessivamente, movendo o hóspede do quarto n para o quarto $n+1$. Deste modo, o quarto número 1 ficará vazio para o novo hóspede.

Agora, imagina que chega ao hotel um número infinito de novos hóspedes. Neste caso, pede-se aos que já lá estão alojados que voltem a trocar de quarto, mas desta vez indo para o quarto cujo número é o dobro do número do quarto em que estão. Desta forma, ficarão disponíveis quartos suficientes (todos os que têm número ímpar) para os infinitos novos hóspedes.

Esta história só faz sentido porque partimos do pressuposto que o hotel tem um número infinito de quartos.

Recorrendo ao conhecimento que tens de sucessões, o primeiro processo, depois de ter ficado livre o quarto número 1 para o novo hóspede, pode ser traduzido pela sucessão de termo geral,

$$u_n = n + 1$$

No segundo caso, ao mudarem para o quarto cujo número é o dobro do número do quarto em que se alojavam, ficando livres os quartos de numeração ímpar (são em número infinito), os hóspedes passam a ocupar o quarto com número traduzido pela sucessão de termo geral,

$$u_n = 2n$$

Pressupor que o número de quartos é infinito permite o recurso às sucessões, em que os valores dos seus termos ultrapassam sempre, a partir de certa altura, qualquer valor fixado antecipadamente.

Referência histórica

David Hilbert (1862-1943)

No começo do século XX o matemático alemão **David Hilbert** disse:

"O infinito! Nenhum outro conceito estimulou tão profundamente o espírito humano; nenhuma outra ideia estimulou o intelecto de modo tão frutífero, e no entanto nenhum outro conceito precisa ser mais esclarecido do que a ideia de infinito".



Referência histórica

John Wallis (1616-1703)

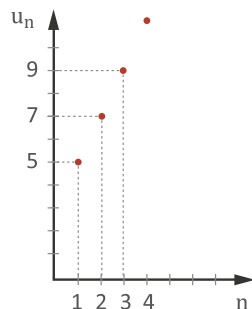
Matemático Inglês, antecessor de Newton, foi o primeiro a usar o símbolo de infinito que ainda hoje adoptamos.



Infinitamente grande positivo

Considera a seguinte sucessão de termo geral $a_n = 2n + 3$

Observa a representação gráfica, obtida numa calculadora gráfica, dos primeiros termos da sucessão,



Por maior que seja o número que imaginemos, existe sempre uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão são maiores que esse número. Diz-se que esta sucessão é um infinitamente grande positivo. Também podemos escrever: $u_n \rightarrow +\infty$

Tarefa 37

Mostra que se $u_n = n^2 - 10n$ existe um número p , tal que se $n > p$ então $u_n > 2750$

Uma sucessão (u_n) é um infinitamente grande positivo se e só se, para qualquer número real positivo L , existir uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão são maiores do que L .

Exemplo:

Seja (u_n) A sucessão de termo geral $u_n = n^2$

- Determina, caso exista, uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão são maiores do que 100.
- Mostrar que $u_n \rightarrow +\infty$

Resolução:

- Queremos determinar uma ordem p ($p \in \mathbb{N}$), tal que para $n > p$ se verifique $u_n > 100$.

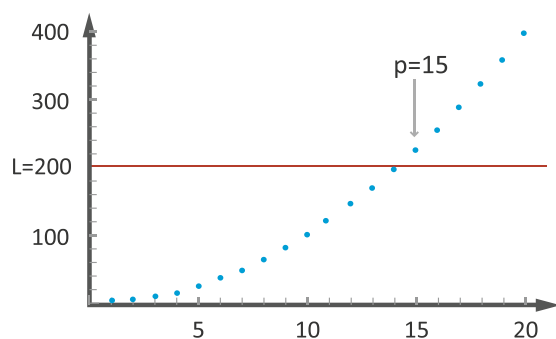
Ou seja,

$$u_n > 100 \Leftrightarrow n^2 > 100 \Leftrightarrow n^2 - 100 > 0 \Leftrightarrow (n - 10)(n + 10) > 0 \Leftrightarrow n > 10$$

Considerando $p = 10$, todos os termos da sucessão de ordem superior a 10 são maiores do que 100.

- b) Mostrar que $u_n \rightarrow +\infty$, consiste em verificar que para qualquer número real positivo L , existe uma ordem p , natural, tal que para, $n > p, u_n > L$

Temos que p depende de L (se $L = 100$ basta considerar $p = 11$, mas se $L = 200$ teremos de considerar $p = 15$).



Seja então, L um número real positivo qualquer.

Para $n > p$ o gráfico da sucessão está acima da reta de equação $y=L$,

$u_n > L$, substituindo temos $n^2 > L$

Seja p natural, igual ou superior a \sqrt{L} ($p \geq \sqrt{L}$),

temos que para $n > p$ todos os termos da sucessão são maiores do que L .

A sucessão é um infinitamente grande positivo.

Infinitamente grande negativo

Seja $u_n = n$ o termo geral da sucessão dos números naturais.

Esta sucessão é um infinitamente grande positivo.

Considera agora a sucessão de termo geral, $v_n = -n$.

Observa que os termos são: $-1; -2; -3; \dots; -80; \dots$

Como $u_n = n$ é um infinitamente grande positivo, diz-se que $v_n = -n$ é um infinitamente grande negativo. Também podemos escrever:

$$u_n \rightarrow -\infty$$

A sucessão (u_n) é um infinitamente grande negativo se e só se a sucessão $(-u_n)$ for um infinitamente grande positivo.

Tarefa 38

Mostra que são infinitamente grandes positivos as sucessões de termo geral:

a) $u_n = n - 24$

b) $v_n = n^2 - 100$

Tarefa 39

Mostra que $u_n = (-1)^n n$ não é um infinitamente grande positivo.

Exemplo:

Mostrar que a sucessão de termo geral $a_n = -\sqrt{n}$ é um infinitamente grande negativo.

Para mostrar que $a_n \rightarrow -\infty$, basta verificar que $-a_n \rightarrow +\infty$

Sendo $-a_n = \sqrt{n}$ e sendo L um número real positivo qualquer, tem-se
 $-a_n > L$ logo $\sqrt{n} > L$ pelo que $n > L^2$

Tarefa 41

Indica o valor lógico das seguintes afirmações

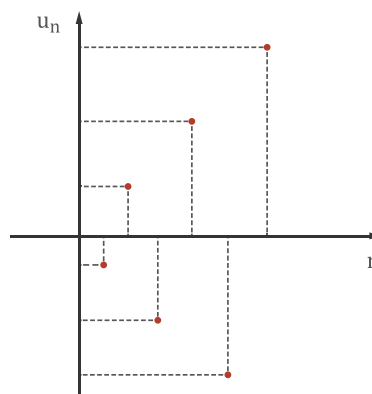
- Se uma sucessão não é limitada então é um infinitamente grande negativo.
- Um infinitamente grande positivo é sempre uma sucessão não limitada.

Tomando p igual ao menor natural não inferior a L^2 , podemos afirmar que para $n > p$ todos os termos da sucessão $(-a_n)$ são maiores do que L . Temos então que: $-a_n \rightarrow +\infty$ e verifica-se $a_n \rightarrow -\infty$, ou seja, $a_n = -\sqrt{n}$ é um infinitamente grande negativo.

Infinitamente grande em módulo

Seja a sucessão de termo geral, $u_n = (-1)^n n$

Alguns termos da sucessão são: -1; 2; -3; 4; -5; 6;



Tarefa 42

Justifica que a sucessão de termo geral: $a_n = (-1)^n n^2$ é um infinitamente grande em módulo.

Observamos que:

- A sucessão não é um infinitamente grande positivo (porquê?)
- A sucessão não é um infinitamente grande negativo (porquê?)

Seja a sucessão cujos termos são o módulo dos termos de (u_n) .

Tem-se: $|u_n| = |(-1)^n n| = n$

Como a sucessão dos números naturais é um infinitamente grande positivo, então $|u_n|$ é um infinitamente grande positivo em módulo.

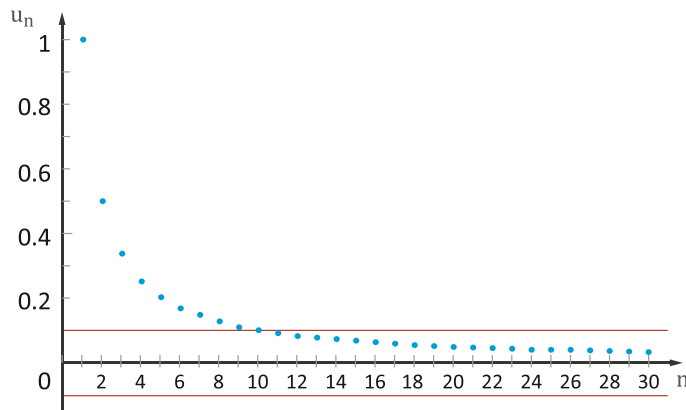
$$|u_n| \rightarrow +\infty$$

Uma sucessão (u_n) é um infinitamente grande em módulo se e só se $(|u_n|)$ é um infinitamente grande positivo.

Infinitésimos

Considera a seguinte sucessão de termo geral, $u_n = \frac{1}{n}$

Observa a representação gráfica de alguns termos desta sucessão:



Por exemplo,

Para ordem 100 temos que:

$$u_n = \frac{1}{100} = 10^{-2} = 0,01$$

Para a ordem 10000 temos que:

$$u_n = \frac{1}{10000} = 10^{-4} = 0,0001$$

Para a ordem 1000000 temos que:

$$u_n = \frac{1}{1000000} = 10^{-6} = 0,000001$$

As medidas que n aumentam os termos da sucessão aproximam-se de zero.

Tarefa 40

Mostra que são infinitamente grandes negativos as seguintes sucessões:

a) $q_n = -n + 4$

b) $r_n = -n^3 + 55$

A uma sucessão com este comportamento, que a partir de certa ordem se aproxima de 0, chama-se infinitésimo ou infinitamente pequeno.

Diz-se que uma sucessão (u_n) é um infinitésimo ou que tende para zero $(u_n \rightarrow 0)$ se e só, para todo o número real e positivo d , é possível determinar uma ordem p a partir da qual todos os termos são, em módulo, menores que d .

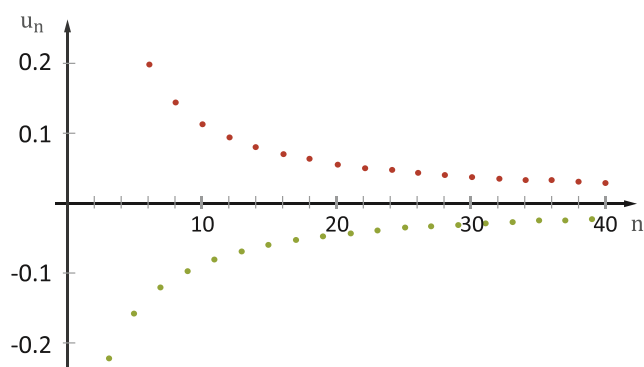
Escrevemos: $u_n \rightarrow 0$.

Tarefa 43

Determina a ordem a partir da qual os termos de cada uma das sucessões são menores que 0,001

a) $u_n = \frac{7}{2n}$

b) $u_n = \frac{3}{n^2}$



Os pontos do gráfico a partir de certa ordem p , estão entre a reta horizontal $y = d$ e $y = -d$.

Exemplos:

Considera a sucessão definida por $u_n = \frac{1}{n^2}$

Para $d = 0,001$, $p > \sqrt{\frac{1}{0,001}} = \sqrt{1000} \approx 31,62$

$$u_{32} = 0,000977 < d$$

Para $d = 0,000005$, $p > \sqrt{\frac{1}{0,000005}} = \sqrt{200000} \approx 447,2$

$$u_{448} = 0,00000498 < d$$

d	$p > \sqrt{\frac{1}{d}}$	u_p
0,001	$p > 31,62$	$u_{32} = 0,000977$
0,00001	$p > 316,23$	$u_{317} = 0,00000995$
0,00000001	$p > 10000$	$u_{1001} = 0,000000998$
\vdots	\vdots	\vdots

Dado um número positivo d , por mais pequeno que seja, a partir de certa ordem todos os termos da sucessão são menores que d .

Ou seja a partir de uma ordem $p > \sqrt{\frac{1}{d}}$ todos os termos são menores que d . A sucessão dada é um infinitésimo.

Tarefa 44

Considera a sucessão

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{n} \end{cases}$$

Mostra que

- $u_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (u_n) é não monótona.
- (u_n) é um infinitésimo.

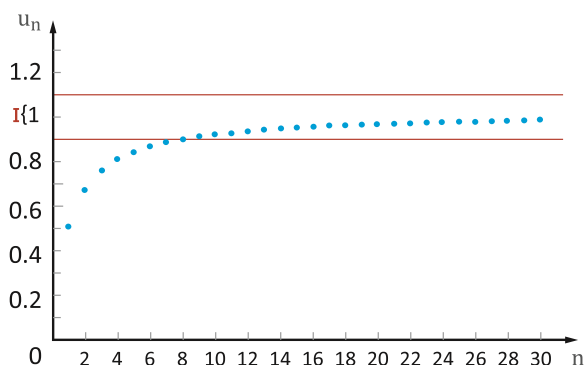
Limite de uma sucessão

Consideremos a sucessão (u_n) em que os primeiros termos estão representados na seguinte tabela:

n	u_n
1	1
2	1,5
3	1,75
4	1,875
5	1,9375
6	1,96875
7	1,984375
(...)	(...)

Verificamos que é uma sucessão crescente e que os seus termos se vão aproximando de 2, sem atingir este valor.

Observa a seguinte representação gráfica:



Tarefa 45

Verifica que as seguintes sucessões são infinitésimos

- $u_n = \frac{1}{n^4}$
- $u_n = -\frac{1}{3n}$

Tarefa 46

Seja a sucessão definida por

$$u_n = \frac{n-1}{n}$$

- Constrói uma tabela com os valores dos primeiros termos.
- Que podes concluir para valores muito grandes de n ?

O gráfico mostra-nos que a partir da ordem 12, todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo I . Ou seja, pertencem ao intervalo $I =]l - a, l + a[$, com a um valor real positivo tão pequeno quanto se possa imaginar.

Atendendo às circunstâncias descritas, dizemos que esta sucessão “tende” ou “converge” para o número 1, ou que 1 é o **limite** da sucessão.

Seja ainda a sucessão de termo geral, $u_n = \frac{n+3}{n}$.

Calculando os primeiros termos :

$$4; \frac{5}{2}; 2; \frac{7}{4}; \frac{8}{5}; \frac{3}{2}; \frac{10}{7}; \frac{11}{8}; \dots$$

Trata-se de uma sucessão decrescente e limitada.

Por outro lado, repara que $\frac{n+3}{n} = 1 + \frac{3}{n}$ (porquê?).

Ou seja, $1 + \frac{3}{n} > 1$, para todo $n \in \mathbf{N}$ (porquê?).

Registamos alguns termos da sucessão na seguinte tabela:

n	u_n
1	4
2	2,5
8	1,375
15	1,2
30	1,1
80	1,0375
150	1,02
500	1,006
\vdots	\vdots

Verificamos que a partir de certa ordem, tal como no exemplo anterior, todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo $]l - a, l + a[$, com a um valor real positivo tão pequeno quanto se possa imaginar.

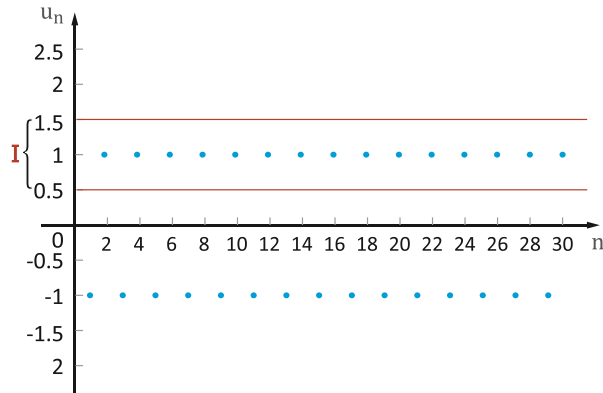
Diz-se que uma sucessão (u_n) converge para um número real “ l ” ou que tem por limite o número “ l ” se e só se para cada real positivo a (tão pequeno quanto se possa imaginar) existe uma ordem, depois da qual todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo $]l - a, l + a[$.

Uma sucessão que converge para um número real diz-se uma sucessão convergente. Caso contrário, dá-se-lhe o nome de divergente.

Exemplo:

A sucessão de termo geral, $u_n = (-1)^n$, tem como termos:

- 1 (se n é par)
- -1, se n é ímpar.



Observa que não existe limite da sucessão. Ou seja, os termos de ordem par estão no intervalo $I =]-1, 1[$. Mas, isso não acontece com os termos de ordem ímpar.

Nota que uma sucessão é divergente se não tem limite ou se é um infinitamente grande.

Propriedades das sucessões convergentes

1. O limite de uma sucessão, caso existe é único.
2. O limite de uma constante é a própria constante.
3. Se uma sucessão é monótona e limitada então é convergente.

Exemplo:

Considera a sucessão $u_n = 2 + \frac{1}{n}$

$$u_{n+1} - u_n = 2 + \frac{1}{n+1} - 2 - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0.$$

Ou seja, a sucessão é monótona decrescente, pelo que o seu maior termo é o primeiro ($u_1 = 3$).

Por outro lado, observa que para todo n a sucessão verifica a condição: $2 < u_n \leq 3$. Isto é a sucessão é limitada.

Tarefa 47

Dadas as sucessões de termo geral:

$$w_n = \frac{4-5n}{n}$$

$$u_n = \frac{3}{n^2+1}(3+n)$$

Justifica que são convergentes.

Tarefa 48

Mostra que as sucessões de termo geral:

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}n}{2n+1}$$

$$v_n = (-1)^n \frac{n-1}{n}$$

são divergentes.

Então, a partir de certa ordem, os termos da sucessão pertencem ao intervalo $]2 - a, 2 + a[$, com a tão pequeno quanto se possa imaginar. Ou seja, a sucessão é convergente para 2.

Como é monótona e limitada então é convergente.

Soma de todos os termos de uma progressão geométrica

Paradoxo de Zenão: Aquiles e a tartaruga

Aquiles desloca-se dez vezes mais rápido que a tartaruga.

Esta parte com um avanço inicial de 100 metros.

Aquiles corre para apanhar a tartaruga, mas nunca chegará alcançá-la porque, quando atingir o lugar onde estava a tartaruga, já ela não estará lá, porque entretanto se deslocou e esta situação repete-se indeterminadamente.

Este raciocínio, parecendo inatacável, no entanto conduz a uma conclusão que a realidade mostra ser falsa (paradoxo).

Na realidade, Aquiles alcança a tartaruga após ter percorrido a distância de $\frac{1000}{9}$ metros.

As distâncias, em metros, a percorrer por Aquiles até alcançar a tartaruga é dada por:

$$100 + 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + \dots$$

Estas distâncias são termos de uma progressão geométrica de primeiro termo igual a 100 e razão de progressão 0,1.

A sucessão da soma das distâncias é dada por:

$$S_1 = 100$$

$$S_2 = 100 + 100$$

$$S_3 = 100 + 10 + 1$$

$$S_4 = 100 + 10 + 1 + 0,1$$

$$S_5 = 100 + 10 + 1 + 0,1 + 0,01$$

$$S_6 = 100 + 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001$$

$$S_7 = 100 + 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001$$

(...)

Referência histórica

Zenão de Eleia

Filósofo sofista que viveu no séc. V A.C., ficou conhecido por um paradoxo, contado na forma de uma corrida entre Aquiles (campeão olímpico) e uma simples tartaruga.

Para facilitar o cálculo, vamos deduzir uma expressão que nos permita determinar a soma de todas estas distâncias.

Considera que:

$$S_7 = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7$$

Multiplicamos ambos os lados da equação pela razão r .

$$rS_7 = rd_1 + rd_2 + rd_3 + rd_4 + rd_5 + rd_6 + rd_7$$

Subtraindo, $S_7 - rS_7 = (d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7) - (rd_1 + rd_2 + rd_3 + rd_4 + rd_5 + rd_6 + rd_7)$

$$S_7 - rS_7 = (d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7) - (rd_1 + rd_2 + rd_3 + rd_4 + rd_5 + rd_6 + rd_7)$$

Eliminando os valores simétricos, temos:

$$S_7(1-r) = d_1 - rd_7 \Leftrightarrow S_7(1-r) = d_1 - d_1 \times r^7$$

Donde, a soma das sete primeiras distâncias percorridas por Aquiles é dada por:

$$S_7 = a_1 \times \frac{1-r^7}{1-r}. \text{ Ou seja,}$$

$$S_7 = 100 \times \frac{1-0,1^7}{1-0,1} = 111,11...$$

Então, a expressão seguinte representa a soma das n primeiras distâncias percorridas por Aquiles:

$$S_A = 100 \times \frac{1-(0,1)^n}{1-0,1}$$

Calcularemos mais adiante que, quando .

$$n \rightarrow +\infty, S_A \text{ tende para o valor } \frac{1000}{9}$$

Por outro lado a tartaruga percorre, em metros, a sucessão de distâncias:

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots$$

A expressão seguinte representa a soma de todas as distâncias percorridas pela tartaruga:

$$S_r = 10 \times \frac{1-(0,1)^n}{1-0,1}$$

Quando $n \rightarrow +\infty$, S_T tende para o valor $\frac{100}{9}$

Como $\frac{1000}{9}$ é igual a $100 + \frac{100}{9}$, podemos concluir que Aquiles alcança a tartaruga depois de correr $\frac{1000}{9}$ metros.

Tarefa 49

Considera os quadrados da figura



Cada quadrado é construído a partir do anterior com metade do seu lado.

- Determina os três primeiros termos da sucessão das medidas das áreas sabendo que a medida da área do primeiro quadrado é $64m^2$.
- Determina o termo geral das sucessões das áreas.
- Determina a soma das áreas de todos os quadrados da sucessão.

Seja (a_n) uma progressão geométrica de razão r , e primeiro termo a_1 . A soma de todos os termos da sucessão é dada por

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

Se $|r| < 1$, (S_n) é uma sucessão convergente e, nesse caso, a soma de todos os termos da sucessão é igual a $S = \frac{a_1}{1-r}$.

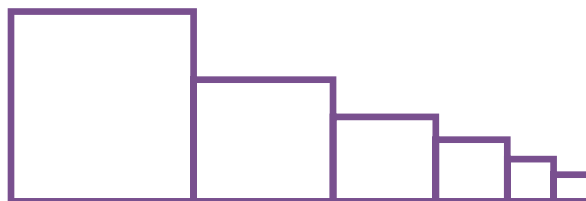
Exemplos:

1. No caso do paradoxo de Aquiles e da tartaruga, a razão entre os termos da progressão das distâncias percorridas é igual a 0,1 (menor que 1). Então,

$$S_A = \frac{100}{1-0,1} = \frac{100}{0,9} = \frac{1000}{9}$$

$$S_T = \frac{10}{1-0,1} = \frac{10}{0,9} = \frac{100}{9}$$

2. Na figura seguinte, o lado de cada quadrado é 60% do lado do quadrado anterior. A medida da área do primeiro quadrado é uma unidade de área.



Qual é a medida da área dos 7 quadrados?

Quadrado	1	2	3	...	7
Lado	1	0,6	$0,6^2$...	$0,6^{10}$
Área	1	$0,6^2$	$0,6^4$	$0,6^{12}$

Os lados são os termos de uma progressão geométrica de razão 0,6 e termo geral

$$L_n = (0,6)^{n-1}$$

Passar de uma área para outra multiplicando por $0,6^2$, ou 0,36. São portanto termos de uma progressão geométrica de razão 0,36 e termo geral $a_n = (0,36)^{n-1}$.

Então,

$$S_7 = 1 \times \frac{1-0,36^7}{1-0,36} = 1,56127556$$

3. Seja (a_n) uma progressão geométrica de razão $r > 0$ e tal que $a_1 = 4$ e $a_3 = \frac{16}{9}$.

Queremos calcular a soma de todos os termos da sucessão (a_n) .

Observa que a razão é $r = \frac{2}{3}$, como $r < 1$, a soma de todos os termos da sucessão é $S = \frac{a_1}{1-r} = 12$

Estudo intuitivo da sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Vamos determinar alguns termos desta sucessão:

$$u_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

$$u_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$$

$$u_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2,370$$

(...)

$$u_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2,704813829 \dots$$

(...)

$$u_{1000} = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,7169239 \dots$$

(...)

Referência histórica

Constante de Euler, assim chamado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler. Este irracional também é conhecido por **número de Neper**, por surgir referido na tabela de logaritmos publicada em 1618 por John Napier.

Mas, a primeira indicação à constante é atribuída a Jacob Bernoulli, quando tentava encontrar um valor para a seguinte expressão: $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Tarefa 50

Calcula o limite das sucessões definidas pelos seguintes termos gerais:

a) $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$
b) $b_n = \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{2n}$

Tarefa 51

O limite da seguinte sucessão existe? Justifica.

$$u_n = \left(-1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Prova-se que esta sucessão de termo geral $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é convergente para um número real.

Quando $n \rightarrow +\infty$ esta sucessão tende a aproximar-se de um número irracional, designado por constante de Euler, designado por “ e ” cujo valor aproximado com cinco casas decimais é 2, 71828.

Ou seja,

$$\text{Quando } n \rightarrow +\infty \text{ temos } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$$

Método de Indução Matemática

O Método de Indução Matemática é um método utilizado para provar que certas propriedades são verdadeiras para todos os números naturais, baseado nos seguintes dois passos:

Se queremos provar que uma determinada propriedade é válida no conjunto dos números naturais, começamos por:

1. **Base de indução:** Estabelecer a propriedade para o primeiro dos números naturais, ou seja, para $n=1$;
2. **Passo de indução:** Admitir que a regra é válida para um determinado valor $n=k$ e, a partir desta hipótese (hipótese de indução) ser verdadeira, provar que será também verdadeira para o elemento $k+1$ (hereditariedade).

Sintetizando,

Se pretendemos provar que uma propriedade $A(n)$ se verifica no conjunto \mathbb{N} , devemos provar que:

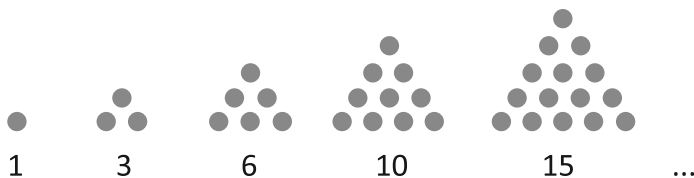
$A(n)$ é verdadeira para $n = 1$;

Hipótese de indução: $A(n)$ é verdadeira para qualquer natural $n = p$, p natural e arbitrário, então a propriedade $A(n)$ verifica-se para $n = p+1$. Ou seja, $A(p+1)$ é verdadeira, o que se exprime dizendo que a propriedade $A(n)$ é hereditária.

Então, concluímos que $A(n) \forall n \in \mathbb{N}$, **é verdadeira.**

Exemplos:

1. Considera a sucessão dos números triangulares:



cuja definição por recorrência é $\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_n = t_{n-1} + n, \text{ para } n > 1 \end{cases}$ tem o seguinte

$$\text{termo geral } t_n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Prova

Começamos por verificar que a propriedade é válida para $n=1$.

Na sucessão de recorrência tem-se que $t_1 = 1$

$$\text{Pelo termo geral } t_1 = \frac{1^2 + 1}{2} = 1$$

Como são iguais, a propriedade é válida para $n=1$.

Supondo que esta propriedade é válida para a ordem p ,

$$t_p = \frac{p^2 + p}{2} \text{ (hipótese de indução)}$$

Queremos provar que esta propriedade é válida para a ordem $p+1$, isto é que:

$$t_{p+1} = \frac{(p+1)^2 + (p+1)}{2} \text{ que é o mesmo que } t_{p+1} = \frac{p^2 + 3p + 2}{2} \quad (1)$$

$$\text{Como } t_{p+1} = t_p + p + 1$$

Substituindo t_p pela expressão obtida na hipótese de indução, podemos

$$\text{escrever } t_{p+1} = \frac{p^2 + p}{2} + p + 1 \Leftrightarrow t_{p+1} = \frac{p^2 + 3p + 2}{2} \quad (2)$$

Efeito dominó

É habitual ilustrar o Método de indução matemática com o que ocorre com as peças do dominó quando são colocadas como mostra na figura



Se pudermos assegurar que:

- A primeira cai
- Sempre que uma peça cai a seguinte também cai

Então podemos concluir que todas as peças cairão.

Tarefa 52

Recorrendo ao método de indução matemática, prova que:

- a) A soma dos n primeiros termos da sucessão,

$$u_n = 2n - 1 \text{ é } S_n = n^2$$

- b) A soma dos n primeiros números naturais é dada por:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- c) A adição de dois números ímpares é um número par.

- d) O número de diagonais de n qualquer polígono de n lados é dada pela expressão $\frac{n(n-3)}{2}$.

Como (1) é igual a (2), acabamos de provar a hereditariedade.

Logo o termo geral é válido para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$2. \text{ Seja a sucessão } (a_n) \text{ definida por recorrência } \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}, n > 1 \end{cases}$$

Utilizando o método de indução matemática, provar que:

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Prova

Verifiquemos que a expressão é válida para $n=1$.

$$a_1 = \frac{1}{2}; a_1 = \frac{1}{1+1}, \text{ logo é válida}$$

Suponhamos que se verifica para a ordem p , isto é,

$$a_p = \frac{p}{p+1} \text{ (hipótese de indução)}$$

Será que se verifica para $p+1$?

$$a_{p+1} = \frac{p+1}{p+2} ?$$

Aplicando a hipótese de indução, na definição de recorrência

$$a_{p+1} = \frac{1}{2 - \frac{p}{p+1}} = \frac{1}{\frac{2p+2-p}{p+1}} = \frac{p+1}{p+2}$$

Assim, fica provado que a referida propriedade é verificada para $n=1$ e é hereditária, ou seja, é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercícios e problemas

1. Determina a ordem depois da qual $\frac{(-1)^n}{n}$ é menor que 0,003
2. Indica uma ordem depois da qual a sucessão $a_n = \frac{10}{n+2}$ seja em módulo inferior a 0,001

3. Prova que as sucessões dadas são infinitésimos

3.1. $a_n = \frac{1}{n^3}$

3.2. $b_n = \frac{3n}{n^2 + 2}$

3.3. $c_n = -\frac{1}{5n+2}$

4. Indica, justificando, o valor lógico das proposições seguintes:

A: Toda sucessão monótona é limitada

B: Toda sucessão limitada é convergente

C: Toda sucessão monótona e limitada é convergente

5. De entre as seguintes sucessões :

$$a_n = \sqrt{n} \quad b_n = -5 \times 4^n \quad c_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n \quad d_n = \frac{n-1}{n^2}$$

Escolhe uma com as seguintes características:

- 5.1. Seja um infinitamente grande, decrescente
- 5.2. Seja um infinitamente grande, crescente
- 5.3. Seja um infinitésimo decrescente
- 5.4. Seja um infinitésimo, não monótona

6. Calcula os limites das seguintes sucessões

6.1. $u_n = \frac{n+1}{3}$

6.2. $u_n = \frac{n^2+2}{n}$

6.3. $u_n = n - \frac{3}{n}$

6.4. $u_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$

6.5. $u_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{3n}$

6.6. $u_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$

7. Provar usando o método de indução

7.1. $2^n \times 3^n = (2 \times 3)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

7.2. $2^n < 2^{n+1}$ para todo n natural

7.3. $10^{n+1} - 9n - 10$ é múltiplo de 81, para todo n natural

7.4. $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$, para todo n natural

M E T A S

Resolver problemas de triângulos retângulos

Determinar o valor de uma relação trigonométrica de um ângulo, dado o valor de outra

Resolver equações redutíveis a equações dos tipos:
 $\sin x = k$; $\cos x = k$; $\tan x = k$ (k constante)

Representar graficamente as funções circulares

Identificar propriedades gráficas e analíticas das funções circulares

Utilizar as funções circulares na modelação de situações reais



Unidade Temática 2 | Trigonometria

Subtema 1 - Generalização da noção de ângulo
e de arco - Medidas

Subtema 2 - Relações trigonométricas

Subtema 3 - Funções circulares diretas. Generalidades

Conteúdos

Lei dos senos; Lei dos cossenos

Aplicações

Generalização da noção de ângulo

Expressão geral dos ângulos que têm o mesmo lado origem e o mesmo lado extremidade

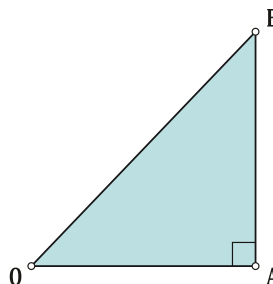
Medidas das amplitudes de ângulos e de arcos



Subtema 1 - Generalização da noção de ângulo e de arco - Medidas

Estudaste anteriormente as noções de seno, coseno, tangente e cotangente de um ângulo agudo num triângulo retângulo.

Assim, considerando um triângulo retângulo [OAB]



Definiram-se as razões trigonométricas do ângulo α :

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} ; \cos \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} ; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} ; \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}$$

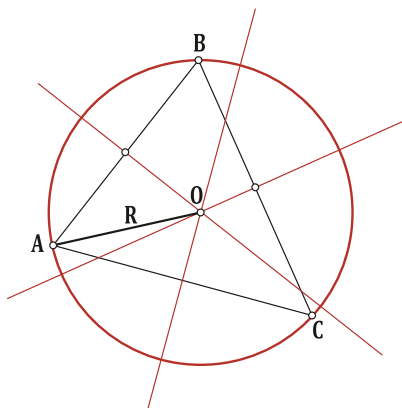
Estudaste, também, que as razões trigonométricas não dependem do triângulo retângulo considerado. Contudo nem todos os triângulos são retângulos.

As relações que vamos estudar a seguir são aplicáveis na resolução de problemas que envolvem triângulos quaisquer.

Lei dos senos

Num triângulo qualquer [ABC], sabe-se que as suas **mediatrizes** (retas cujos pontos são equidistantes dos extremos de um dos lados do triângulo) interseccionam-se num ponto O, denominado por **circuncentro**, que é equidistante dos vértices A, B e C, ou seja, tal que $\overline{AO} = \overline{OB} = \overline{OC}$

É, portanto, possível construir uma circunferência, com centro neste ponto, que passa pelos três vértices do triângulo. O raio desta circunferência designa-se por **circunraio** (R).



A lei dos senos diz-nos que existe uma proporcionalidade entre o comprimento de cada lado do triângulo e o seno do ângulo oposto, sendo que a constante de proporcionalidade é o dobro do circunraio.

$$\frac{\overline{AB}}{\text{sen}(C)} = \frac{\overline{BC}}{\text{sen}(A)} = \frac{\overline{CA}}{\text{sen}(B)} = 2R$$

Exemplo:

Considerando o triângulo anterior [ABC], determina o lado c (lado que se opõe ao ângulo de vértice C), sabendo que $a = 14$ cm, $A = 16^\circ$, $C = 30^\circ$

Da lei dos senos, sabemos que,

$$\frac{c}{\text{sen}(C)} = \frac{a}{\text{sen}(A)} = \frac{b}{\text{sen}(B)}$$

Então substituindo temos

$$\frac{c}{\text{sen}30^\circ} = \frac{14}{\text{sen}16^\circ}$$

$$c = \frac{14\text{sen}30^\circ}{\text{sen}16^\circ} = \frac{7}{0,2756} \approx 25,4$$

O lado c tem de comprimento aproximadamente 25,4 centímetros.

Lei dos cosenos

Num triângulo qualquer, o quadrado da medida de um dos lados é igual à diferença entre a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados e o dobro do produto dessas medidas pelo coseno do ângulo por estes formado.

Ou seja,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b \cos(A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a \cos(B)$$

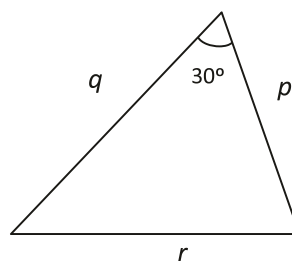
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.b \cos(C)$$

Tarefa 1

Considera um triângulo de lados a , b e c , de comprimento, respectivamente, 5, 7 e 9 metros. Determina o ângulo formado pelos lados a e b .

Exemplo:

Considera um triângulo de lados p q r ,



Sabendo que o comprimento de p é 2 metros e que o comprimento de q é $\sqrt{3}$ metros e o ângulo formado pelos lados p e q é de 30° , calcula qual o comprimento de r .

$$r^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2.2.\sqrt{3}.\cos 30^\circ$$

$$r^2 = 4 + 3 - 4.\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

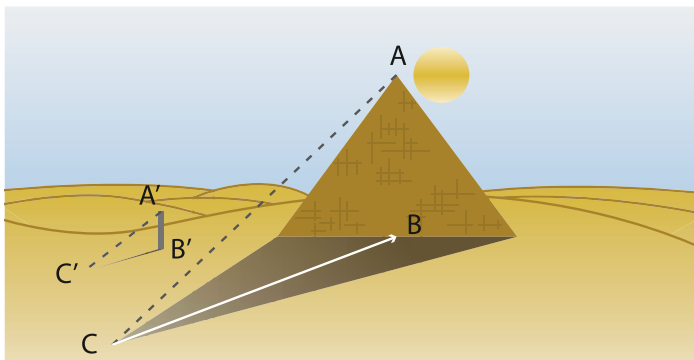
$$r^2 = 7 - 6$$

$$r^2 = 1$$

Ou seja, r tem de comprimento 1 metro (pois r não pode tomar o valor de -1).

Aplicações

Imaginemos que pretendíamos determinar uma altura sem utilizarmos diretamente uma fita métrica, ou outro instrumento equivalente e admitamos que estamos num dia de sol e que a sombra da altura \overline{AB} da pirâmide se projeta no solo segundo o segmento de reta \overline{CB}



Nota histórica

Thales de Mileto, filósofo e matemático grego, para determinar a altura das pirâmides do Egito utilizou o método ilustrado ao lado.

Como calcular \overline{AB} ?

Para isso, coloca-se verticalmente uma vara

$\overline{A'B'}$

De comprimento conhecido e mede-se diretamente (utilizando, por exemplo, uma fita métrica) o comprimento da sombra.

$\overline{C'B'}$

Mede-se, também, o comprimento da sombra \overline{CB} , da altura da pirâmide.

À mesma hora do dia, os raios solares são praticamente paralelos entre si e assim os ângulos C e C' são iguais, o que prova que os triângulos rectângulos [ABC] e [A'B'C'] são semelhantes.

Donde se pode escrever que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'A'}}$$

Assim, se

$$\overline{CB} = 16 \text{ m} ; \overline{A'B'} = 1,8 \text{ m} \text{ e } \overline{C'B'} = 1,2 \text{ m}$$

Temos

$$\frac{\overline{AB}}{16} = \frac{1,8}{1,2}$$

Donde

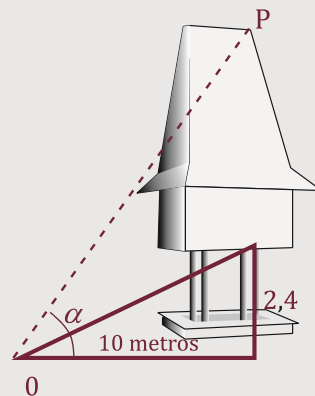
$$\overline{AB} = (16 \times 1,8) \div 1,2$$

E, portanto

A altura \overline{AB} é de 24 metros.

Tarefa 2

O ângulo α de observação para o ponto P é de 62° . Sabendo que o observador está afastado da casa 10 metros e que a altura das estacas é de 2,4 metros, qual a altura total da casa?

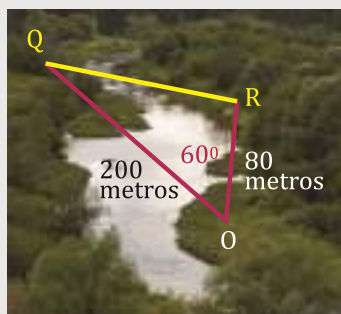


O **teodolito** é um instrumento óptico utilizado para medir ângulos.

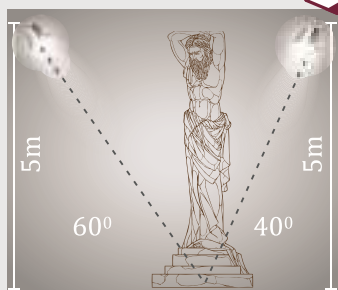


Tarefa 3

Nas condições esquematizadas na figura, vai ser construída uma ponte que une Q a R, por cima de um rio. Temos que saber qual o comprimento da ponte (aproximado a menos de 1 dm).



Tarefa 4

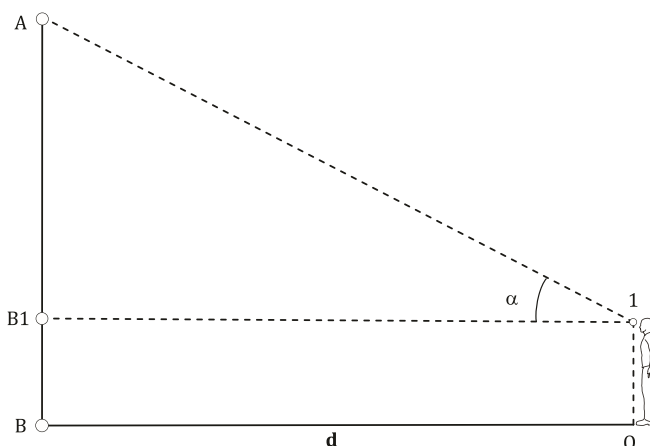


Um monumento é iluminado por holofotes colocados a 5 metros do chão. Os ângulos formados pelos raios luminosos e pelo plano do chão são, respetivamente de 60° e 40° . Calcula a distância do monumento a cada um dos postes onde estão os holofotes.

Problema 1:

Calcular a altura de uma árvore cujo pé é acessível.

Consideremos uma árvore de porte vertical colocada num terreno horizontal. Representando, a altura da árvore por \overline{AB} e por d a distância entre o pé da árvore e a posição O de um observador, se medirmos o ângulo α (com um teodolito), a partir do triângulo $[AB_1O_1]$ podemos escrever



$$\overline{AB_1} = \overline{O_1B_1} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Mas sendo $d = \overline{OB} = \overline{O_1B_1}$

Podemos escrever

$$\overline{AB_1} = d \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

A altura da árvore será $\overline{AB} = \overline{AB_1} + \overline{B_1B}$

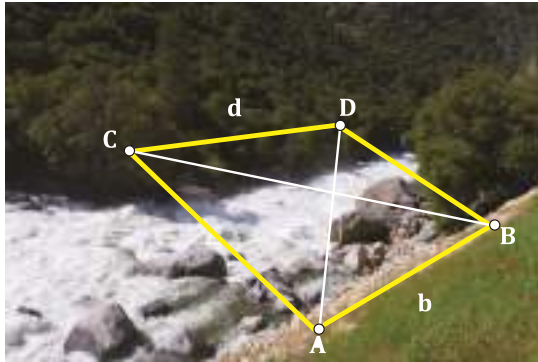
Ou seja,

$$\overline{AB} = d \cdot \operatorname{tg} \alpha + h, \text{ em que } h \text{ designa a altura do observador}$$

Problema 2:

Calcular a distância de dois pontos inacessíveis

Consideremos C e D dois pontos inacessíveis, separados do observador por um rio intransponível.



A distância entre C e D pode ser representada por d .

Para calcular d , vamos medir \overline{AB} (designamos por b), em seguida os ângulos, olhando dos pontos A e B os pontos C e D, respetivamente,

$$\widehat{CAB} = \alpha$$

$$\widehat{DAB} = \alpha'$$

$$\widehat{ABC} = \beta$$

$$\widehat{ABD} = \beta'$$

O triângulo [CAB] permite calcular \overline{AC} ; e o triângulo [DAB] permite calcular \overline{AD} .

Sendo o ângulo \widehat{CAD} igual a $\alpha - \alpha'$

Teremos os elementos necessários ao cálculo do ângulo CDA.

Podemos escrever

$$\frac{d}{\sin(\alpha - \alpha')} = \frac{\overline{CA}}{\sin CDA}$$

Donde

$$d = \frac{\overline{CA} \cdot \sin(\alpha - \alpha')}{\sin CDA}$$

Problema 3:

Calcular a diferença de nível entre os pontos A e B, sendo A inacessível

Observa a seguinte figura onde se representa uma situação de diferença de nível entre dois pontos:

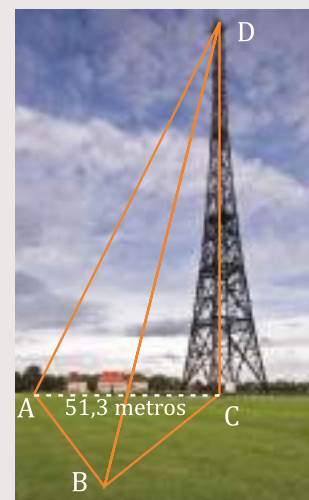
Tarefa 5

Calcula a distância de dois pontos inacessíveis A e B, conhecendo o comprimento do segmento [CD] (sendo C e D os pontos de onde se observa os pontos inacessíveis A e B, respetivamente), $\overline{CD} = 150$ metros e os ângulos $\widehat{BCD} = 40^\circ$; $\widehat{ADC} = 38^\circ$ e $\widehat{BDC} = 70^\circ$.

Tarefa 6

Pretende-se calcular a altura de uma antena [CD] e as distâncias horizontais do ponto C aos pontos A e B.

Para dar resposta a esta questão, efetuaram-se as seguintes medições: $\overline{AB} = 51,3$ m; $\widehat{CAB} = 17^\circ$; $\widehat{ABC} = 129^\circ$; $\widehat{CAD} = 11^\circ$; $\widehat{CBD} = 30^\circ$.



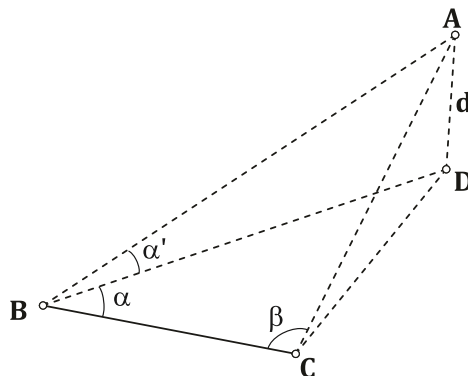
Calcula a altura da antena e as distâncias AC e BC.

Tarefa 7

Um engenheiro pretende construir uma ponte horizontal através de um vale, ligando os pontos A e B, que distam um do outro 109,5 m.

A ponte deve ser suportada por um pilar que assenta no ponto C do referido vale.

Sabendo que o ângulo de desnível entre A e C é de 34° e que entre os pontos B e C o referido ângulo é de 42° , calcula a altura do pilar.



Medindo o comprimento do segmento de reta BC, pode medir-se os ângulos α e β , olhando o ponto D a partir de C e B, respetivamente.

O cálculo da altura d (diferença de nível entre os pontos A e D) faz-se tendo em consideração o triângulo rectângulo [ADB] do qual se conhece o ângulo α' (por leituras diretas com o teodolito) e o cateto BD (lado do triângulo [BCD] anteriormente determinado).

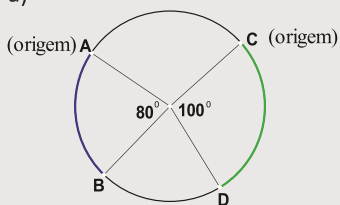
Então d será dado por:

$$d = BD \cdot \operatorname{tg} \alpha'$$

Tarefa 8

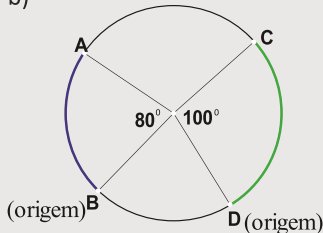
Quais as amplitudes dos seguintes arcos?

a)



$$\widehat{AB} = +80^\circ$$

b)

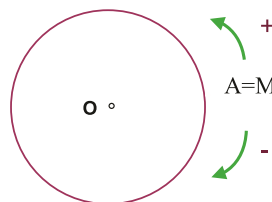


Nota:

Orientar um arco é escolher o seu ponto origem.

Arcos orientados

Considere-se uma circunferência de centro O e seja A um ponto fixo da circunferência. Um ponto móvel M, partindo de A, pode percorrer a circunferência em dois sentidos opostos: no *sentido positivo* (contrário ao do movimento dos ponteiros dum relógio), ou no *sentido negativo* (sentido do movimento dos ponteiros do relógio).

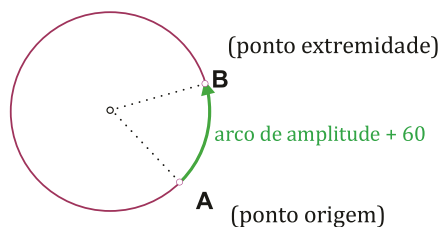


Deste modo as amplitudes de rotação do ponto M podem ser positivas ou negativas e até superiores a $+360^\circ$ ou inferiores a -360° ; pode também ser nula.

O ponto M no seu movimento vai descrevendo arcos de circunferência com um determinado ponto origem (donde partiu M) e um ponto extremidade (onde chegou M); tais arcos têm a amplitude igual à amplitude de rotação de ponto M.

Deste modo podemos conceber arcos de amplitude positiva, nula ou negativa com um certo ponto origem e um determinado ponto extremidade a que chamamos **arcos orientados**.

Exemplos:

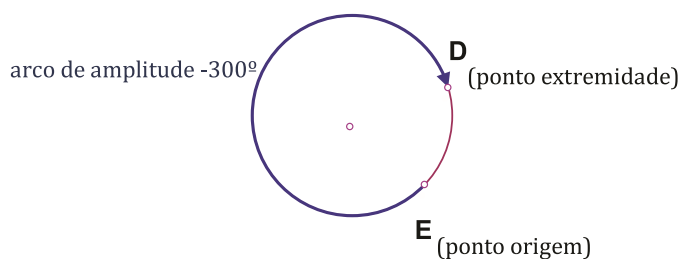


Tarefa 9

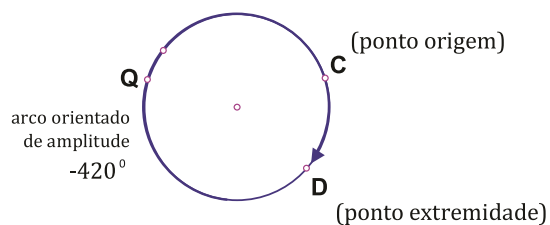
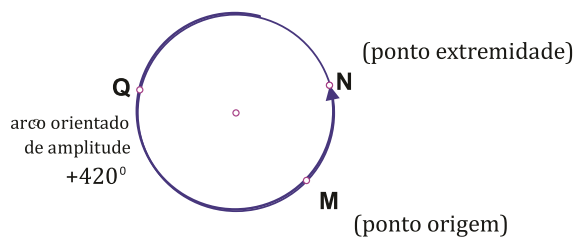
Representa os arcos de amplitudes:

$+330^\circ$; -330° ; -20° ; $+20^\circ$

-90° ; $+180^\circ$; -270° ; 360°



Do mesmo modo que podemos considerar que um ponto Q pode dar mais que uma volta num sentido ou noutro, também podemos conceber arcos orientados de amplitude superior a $+360^\circ$ ou inferiores a -360° .



Nota:

Ao orientar arcos com sentidos opostos com o mesmo valor absoluto, obtenho ângulos com amplitudes simétricas.

Do mesmo modo podemos considerar arcos de amplitude $+1500^\circ$, -3700° , etc.

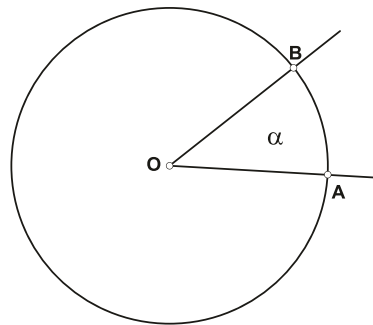
Quando um ponto, partindo da posição A, acaba por ocupar a posição M, depois de rodar em torno do ponto O, diz-se que descreveu o arco \widehat{AM} . O ponto Deste modo o arco \widehat{AM} é positivo ou negativo, conforme o sentido da rotação que leva o ponto móvel a ir da posição A (origem) para a posição M (extremidade).

No seu movimento de rotação em torno da origem, o ponto móvel pode vir a ocupar a posição inicial, depois de ter descrito, num dado sentido, a circunferência completa. Este movimento pode continuar e, deste modo, o arco adquire um significado mais amplo.

A dois pontos A e B marcados sobre uma circunferência de centro O corresponde uma infinidade de amplitudes de arco.

Nota:

Orientar um ângulo é escolher a sua semirreta origem.



Designando uma dessas amplitudes por α , todas as outras são da forma:
 $\alpha + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Generalização da noção de ângulo

Dado um ângulo, quando fixamos a semirreta origem do ângulo, passamos a ter um ângulo orientado.

Consideremos um ângulo ao centro de 45 graus e o arco orientado \widehat{AB} .

