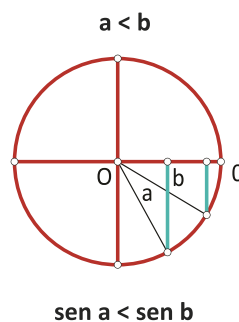
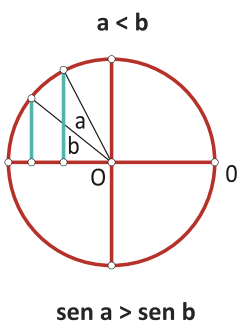
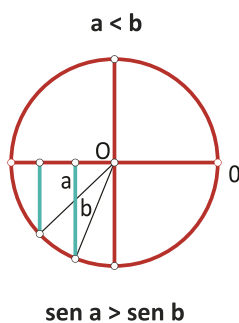
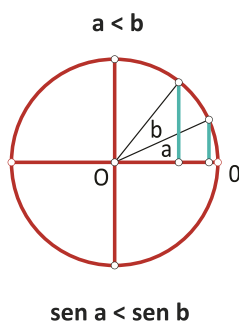


das medidas dos segmentos de reta que unem o ponto P ao ponto do eixo dos Ox que pertence à reta perpendicular a Ox e que passa por P. (na figura seguinte são os segmentos de reta assinalados a azul).



Assim,

No **1º quadrante** quando o ângulo cresce de 0° a 90° , as medidas dos segmentos de reta associados também crescem.

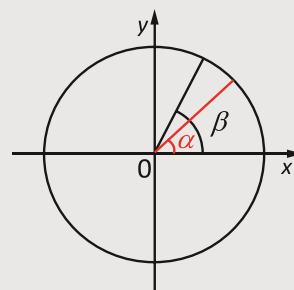
Repara que na figura, o segmento que tem por extremo o ponto de ordenada b é maior que o segmento que tem por extremo o ponto de ordenada a . Ou seja, se $a < b$ então $\text{sen } a < \text{sen } b$, qualquer que seja o ângulo do intervalo considerado. Assim, a função seno, cresce de 0 até +1, visto que a ordenada do ponto P, quando temos um ângulo de 90° , é +1.

No **2º quadrante**, crescendo o ângulo de 90° a 180° , o seno decresce de +1 a 0, pois como sabemos o $\text{sen } 180^\circ = 0$. Ou seja, temos que se $a < b$ então $\text{sen } a > \text{sen } b$.

No **3º quadrante** quando o ângulo cresce de 180° a 270° , o seno decresce, ou seja, se $a < b$ então $\text{sen } a > \text{sen } b$. Neste quadrante o seno decresce de 0 até -1.

Tarefa 32

Na figura estão representados, no círculo trigonométrico, dois ângulos α e β do 1º quadrante tais que $\alpha < \beta$.



Qual é o sinal da seguinte expressão: $\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta$

Tarefa 33

Em relação a dois ângulos sabe-se que

$$\pi < \alpha < \beta < \frac{3\pi}{2}$$

Qual é o sinal da seguinte expressão? $\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta$

Finalmente, no **4º quadrante**, a função seno é de novo crescente, pois parte do valor +1, quando o ângulo é de 270° , para atingir o valor 0, quando o ângulo é de 360° .

Enquanto x percorre o intervalo $[0, 2\pi]$, observe-se a variação da função seno na seguinte tabela,

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen x	0	1	0	-1	0

Variação do sinal

Quanto ao sinal da função seno, verifica-se que é positivo nos quadrantes em que é positiva a ordenada do ponto P, ou seja no 1º e 2º quadrantes e negativo no 3º e 4º quadrantes.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen x	0	+	+	-	-

Tarefa 34

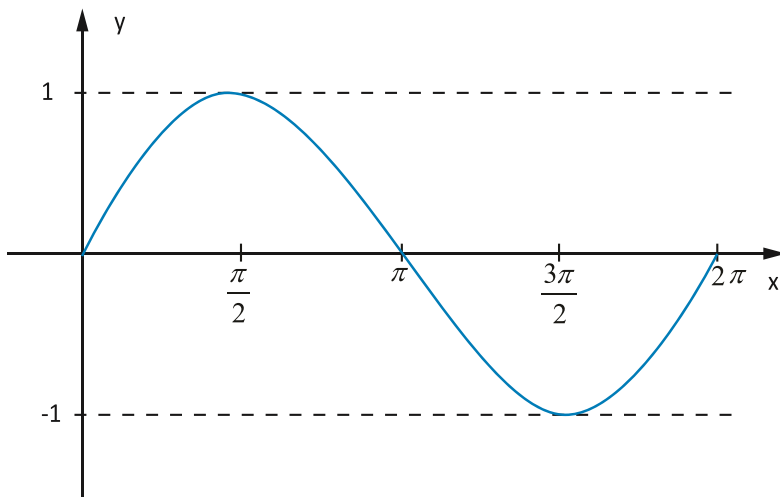
Seja $f(x) = 3\operatorname{sen} x$ a expressão que define uma função de domínio IR.

- Qual é o contradomínio da função?
- Quais são os zeros da função que pertencem ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
- Para que valores de x , pertencentes ao intervalo $[-\pi, 2\pi]$ a função toma o valor mínimo?

Representação gráfica e variação da função $x \rightarrow \operatorname{sen} x$

No estudo anterior, verificamos que, no intervalo considerado, a função seno atinge o valor máximo 1 em $x = \frac{\pi}{2}$ e o valor mínimo -1 em $x = \frac{3\pi}{2}$, no mesmo intervalo o seno tem três zeros, $x = 0$, $x = \pi$, e $x = 2\pi$.

Tracemos a curva representativa da função definida por $y = \operatorname{sen} x$, no intervalo $[0, 2\pi]$.



Coseno

Esta função tem, também, domínio \mathbb{R} e contradomínio $[-1, 1]$.

Define-se a função coseno da seguinte forma:

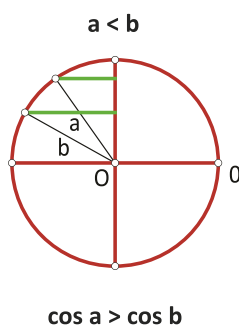
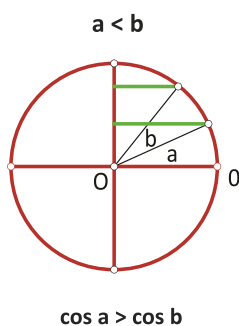
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto f(x) = \cos(x) \end{aligned}$$

Sabe-se que $\cos(-x) = \cos x$, qualquer que seja o valor de x (função é par).

Monotonia

Para o estudo da variação da função coseno, devemos observar a variação das medidas dos segmentos de reta que unem o ponto P ao ponto do eixo Oy que pertence à reta perpendicular a Oy e que passa por P .

Ou seja, na figura seguinte são os segmentos de reta assinalados a verde.



Tarefa 35

Considera a função

$$h(x) = \sin(2x)$$

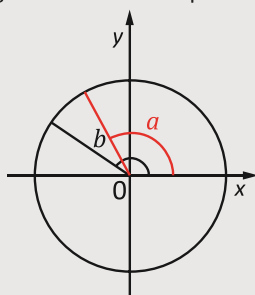
de domínio $[0, 2\pi]$.

a) Determina os zeros da função.

b) Constrói uma tabela de variação da função.

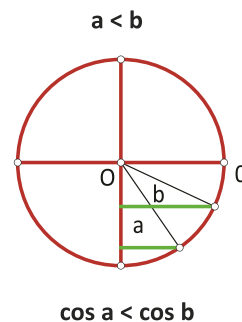
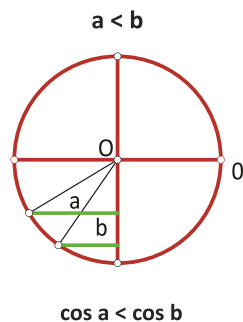
Tarefa 36

Na figura estão representados, no círculo trigonométrico, dois ângulos a e b do 2º quadrante.



Qual é o sinal de cada uma das seguintes expressões?

- a) $\sin b - \sin a$
- b) $\cos b - \cos a$
- c) $\sin a - \cos b$



No **1º quadrante**, quando o ângulo cresce de 0° a 90° , a medida dos segmentos de reta associados decrescem.

Repara que na figura, o segmento que tem por extremo o ponto de ordenada b é menor que o segmento que tem por extremo o ponto de ordenada a . Ou seja, se $a < b$ então $\cos a > \cos b$, qualquer que seja o ângulo do intervalo considerado.

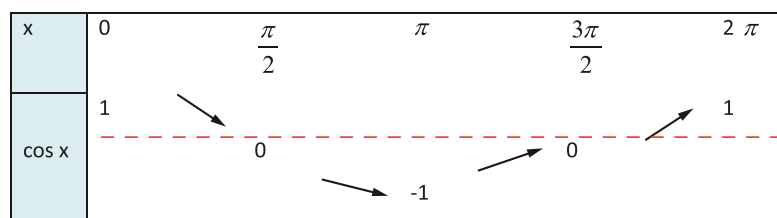
Assim, a função cosseno, decresce de 0 até +1, visto que a ordenada do ponto P, quando temos um ângulo de 90° , é 0.

No **2º quadrante**, crescendo o ângulo de 90° a 180° , o cosseno decresce do valor 0 até ao valor -1 pois como sabemos o $\cos(180^\circ) = -1$.

No **3º quadrante**, quando o ângulo cresce de 180° a 270° , o cosseno cresce do valor -1 até 0.

No **4º quadrante**, a função cosseno é ainda crescente, pois parte do valor inicial 0, quando o ângulo é de 270° , para atingir o valor +1, quando o ângulo é de 360° .

Enquanto x percorre o intervalo $[0, 2\pi]$, observe-se a variação da função cosseno no seguinte quadro,



Varição do sinal

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	
cos x	1	+	0	-	-1	
					+	1

O cosseno atinge, neste intervalo, duas vezes o seu valor máximo 1 em $x=0$ e $x=2\pi$; o seu valor mínimo igual a -1 em $x=\pi$; no mesmo intervalo a função tem dois zeros, $x=\frac{\pi}{2}$ e $x=\frac{3\pi}{2}$.

Tarefa 37

Considera a função

$$f(x) = 2 - \cos\left(\frac{x}{3}\right) \text{ de domínio } \mathbb{R}.$$

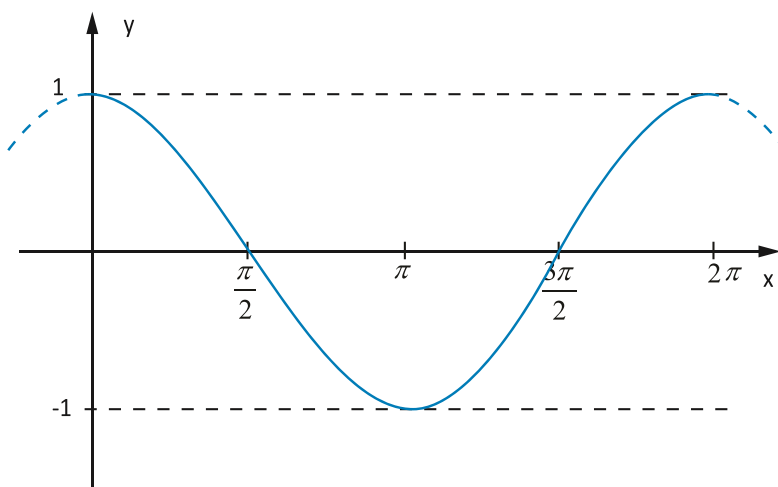
a) A função tem zeros?

Justifica.

b) Mostra que a função dada admite como período 6π .

Representação gráfica e variação da função $x \rightarrow \cos x$

Tracemos a curva representativa da função $\cos x$, neste intervalo.



Define-se a função tangente, tal que:

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \operatorname{tg}(x)$$

Se recordarmos a tangente é o quociente entre as funções seno e cosseno,

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

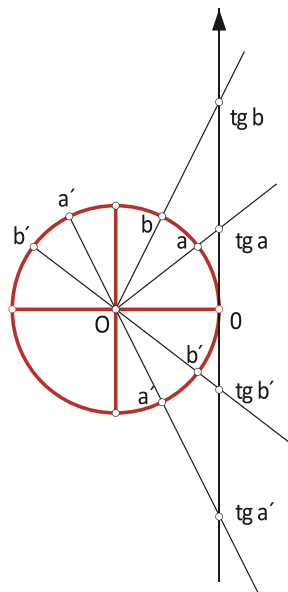
concluimos que o seu domínio D é o conjunto dos números reais que não são zeros do denominador, ou seja, da função cosseno, o que significa

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Tarefa 38

Indica os quadrantes a que deve pertencer o ângulo α para que a afirmação seguinte seja verdadeira:

$$\operatorname{tg} \alpha \times \cos \alpha > 0, \forall \alpha$$



$$a < b$$

$$\operatorname{tg} a < \operatorname{tg} b$$

$$a' < b'$$

$$\operatorname{tg} a' < \operatorname{tg} b'$$

No que diz respeito à periodicidade a função tangente admite também 2π como período, mas, o seu período positivo mínimo é π . O estudo desta função pode restringir-se a um intervalo de período π .

Monotonia

Enquanto x percorre o intervalo $[0, \pi]$, observe-se a variação da tangente no seguinte quadro,

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\operatorname{tg} x$	0	$+\infty$	nd	$-\infty$	0

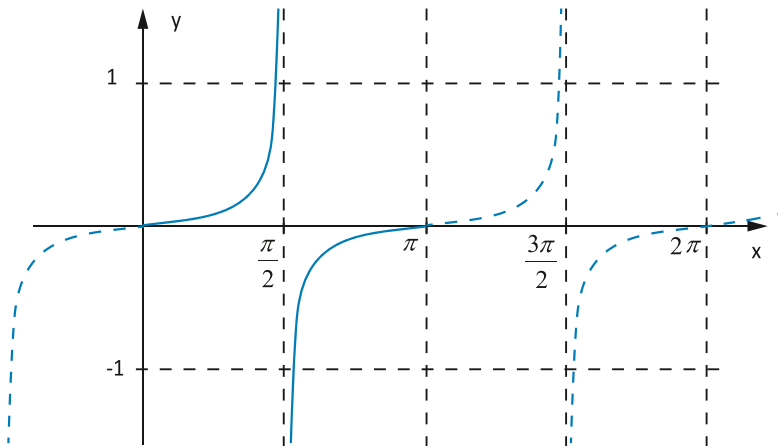
n.d- “ não definido”

Variação do sinal

Quanto ao sinal da função tangente, verifica-se que é positivo para ângulos do 1º e 3º quadrantes e, negativa nos 2º e 4º quadrantes.

Representação gráfica e variação da função $x \rightarrow \operatorname{tg} x$

Tracemos a curva representativa da função tangente.



Observa que, a tangente é crescente nos intervalos, $[0, \frac{\pi}{2} [$ e $]\frac{\pi}{2}, \pi]$ e não admite nem máximos nem mínimos.

As retas da família $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, chamam-se assíntotas verticais da tangente.

Cotangente

Define-se a função cotangente, como sendo uma função f , tal que:

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \cot g(x) \end{aligned}$$

Se recordarmos a cotangente é o quociente entre as funções coseno e seno, $\cot g x = \frac{\cos x}{\sin x}$, concluímos que o seu domínio D é o conjunto dos números reais que não são zeros do denominador, ou seja, da função seno, o que significa

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Tal como acontece com a tangente, a função cotangente admite o período positivo mínimo de π . Ou seja, o estudo desta função pode restringir-se a um intervalo de período π .

Monotonia

Enquanto x percorre o intervalo $[0, \pi]$, observe-se a variação da cotangente no seguinte quadro,

Tarefa 39

Considera as funções f e g , reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

$$g(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right)$$

a) Determina o domínio de cada uma das funções dadas.

b) Mostra que $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ é a expressão para os zeros da função f .

c) Mostra que a função f admite $\frac{\pi}{2}$ como período.

d) Mostra que

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = g\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
cotg x	n.d	$+\infty$	0	$-\infty$	n.d

n.d- “não definido”

Tarefa 40

Representa graficamente, no intervalo $[0, 2\pi]$ as seguintes funções trigonométricas, definidas por:

$$f(x) = 1 + 2\sin x$$

$$g(x) = -\cos x$$

$$h(x) = \operatorname{tg}(2x)$$

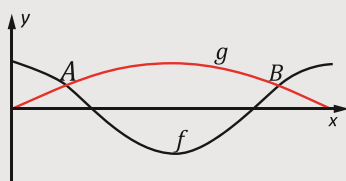
$$i(x) = \cot g\left(\frac{x}{2}\right)$$

Tarefa 41

Na figura estão parcialmente representados os gráficos das funções

$$f(x) = \cos x$$

$$g(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$



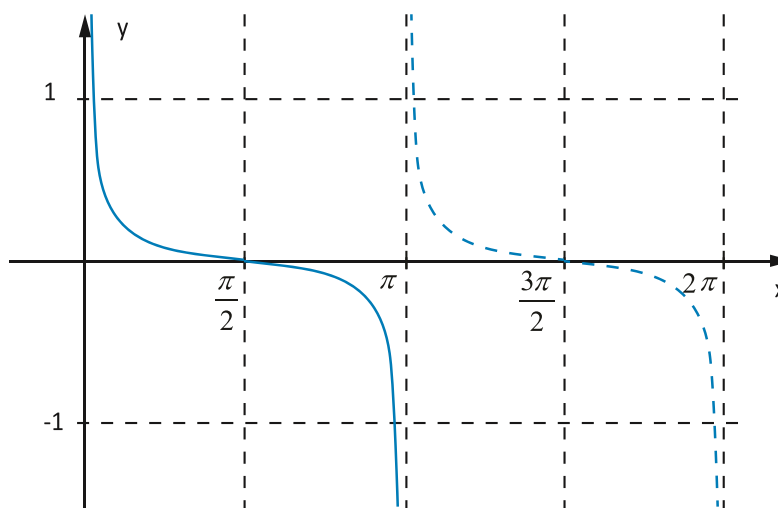
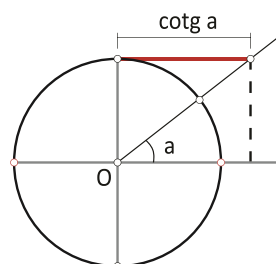
No intervalo $[0, 2\pi]$. Determina as coordenadas dos pontos A e B.

Variação do sinal

Quanto ao sinal da função cotangente, verifica-se que é positivo para ângulos do 2º e 4º quadrantes e, negativa nos 1º e 3º quadrantes.

Representação gráfica e variação da função $x \rightarrow \cotg x$

Tracemos a curva representativa da função cotangente.



Observa que a cotangente é decrescente nos intervalos, $]0, \pi[$ e $]\pi, 2\pi[$, ou seja, em todo o seu domínio e não admite nem máximos nem mínimos.

As retas da família $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, chamam-se assíntotas verticais da representação gráfica da cotangente.

Exemplos:

Iremos a seguir apresentar alguns exemplos de estudo de funções trigonométricas.

Exemplo 1

Estudar a função real de variável real definida por $f(x) = \text{sen}(2x)$ no que respeita às seguintes propriedades:

- Domínio e contradomínio
- Periodicidade
- Máximos e mínimos
- Zeros
- Gráfico

Sabendo que o domínio da função seno é \mathbb{R} e que, no argumento $(2x)$, o x pode tomar qualquer valor real, o domínio e o contradomínio desta função, são

- $Df = \mathbb{R}$
- $CDf = [-1, 1]$

Em relação à periodicidade, a função seno tem por período positivo mínimo 2π , o que significa: $\text{sen}(\alpha + 2\pi) = \text{sen } \alpha$, qualquer que seja o valor de α

Fazendo $\alpha = 2x$, teremos

$$\text{sen}(2x + 2\pi) = \text{sen}(2x), \text{ ou seja}$$

$$\text{sen}(2(x + \pi)) = \text{sen}(2x), \forall x \in \mathbb{R}$$

O período da função f é π . O que significa que $\text{sen}(2x)$ percorre um ciclo completo em π .

A determinação dos máximos e mínimos da função pode ser feita resolvendo as equações:

- $\text{sen}(2x) = 1$ (1 é o valor máximo do contradomínio)
- $\text{sen}(2x) = -1$ (-1 é o valor mínimo do contradomínio)

Tarefa 42

Considera a função real de variável real de domínio

$\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ definida por :

$$f(x) = \sqrt{3}\text{tg}(2x)$$

Determina as coordenadas do ponto de intersecção do gráfico e a reta $y=3$.

Quanto aos máximos,

$$\operatorname{sen}(2x) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Equivalente a } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, os máximos de f são os pontos de abscissas $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Quanto aos mínimos,

$$\operatorname{sen}(2x) = -1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, os mínimos de f são os pontos de abscissas $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

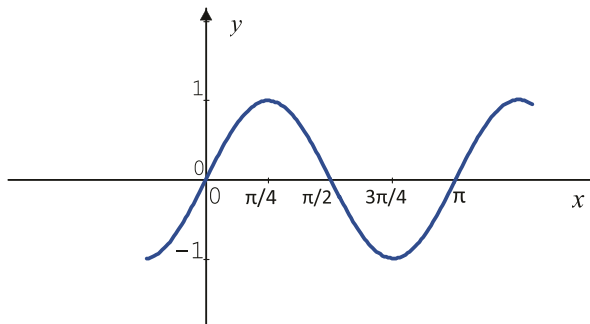
Os zeros da função são as soluções da equação,

$$\operatorname{sen}(2x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}0 \Leftrightarrow 2x = 2k\pi \vee 2x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

O estudo feito e o conhecimento da forma do gráfico da função seno, apoiam o esboço do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ no intervalo $[0, \pi]$ (nota que o período é π).

O prolongamento a \mathbb{R} é ilustrado na representação gráfica seguinte.



Observando o gráfico podemos tirar conclusões acerca da monotonia e variação do sinal. Assim, a função é:

Tarefa 43

Considera a função de domínio \mathbb{R} definida por:

$$f(x) = 1 + 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

- a) Determina os zeros da função
- b) Encontra, caso existam, os valores de x para os quais $f(x) = -2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{crescente } [-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi] \\ \text{decrecente } [\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi] \end{array} \right., k \in \mathbb{Z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{positiva } [k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi] \\ \text{negativa } [-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi] \end{array} \right., k \in \mathbb{Z}$$

Exemplo 2

Considera a função real de varável real definida por $g(x) = 1 + 2\cos x$.

- Determina o contradomínio;
- Calcula $g(\pi) - g(\frac{\pi}{3})$;
- Determina os máximos, mínimos e zeros;
- Esboçar o gráfico de g no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Sabes que $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que

$$2 \times (-1) \leq 2\cos x \leq 2 \times 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$1 - 2 \leq 1 + 2\cos x \leq 1 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-1 \leq 1 + 2\cos x \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

Concluindo o contradomínio de g é $[-1, 3]$.

$$g(\pi) - g(\frac{\pi}{3})$$

O cálculo de $g(\pi) - g(\frac{\pi}{3})$ faz-se por substituição imediata.

$$g(\pi) - g(\frac{\pi}{3}) = 1 + 2\cos \pi - (1 + 2\cos \frac{\pi}{3}) = 1 + 2(-1) - 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = -3$$

Máximos

$$1 + 2\cos x = 3 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Mínimos

$$1 + 2\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Tarefa 44

Considera as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) = 2 + g(x + \pi)$$

$$g(x) = g(2x)$$

a) Calcula $f(-\frac{5\pi}{4}) + g(\frac{3\pi}{2})$

b) Esboça o gráfico da função f e indica o seu contradomínio

c) Esboça o gráfico da função

g no intervalo $[-\pi, \pi]$ e determina os seus zeros

d) Indica o valor lógico das seguintes afirmações:

A “ f e g são funções ímpares”

B f é crescente em $[0, \pi]$

Tarefa 45

Determina o contradomínio das seguintes funções:

$$f(x) = (\operatorname{sen} x)^2$$

$$g(x) = 2 - 3 \cos x$$

$$h(x) = -10 - 5 \operatorname{tg} x$$

$$i(x) = |1 + 2 \cos x|$$

Zeros

$$1 + 2 \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para esboçar o gráfico da função g no intervalo $[-\pi, \pi]$ aproveitaremos os resultados anteriores,

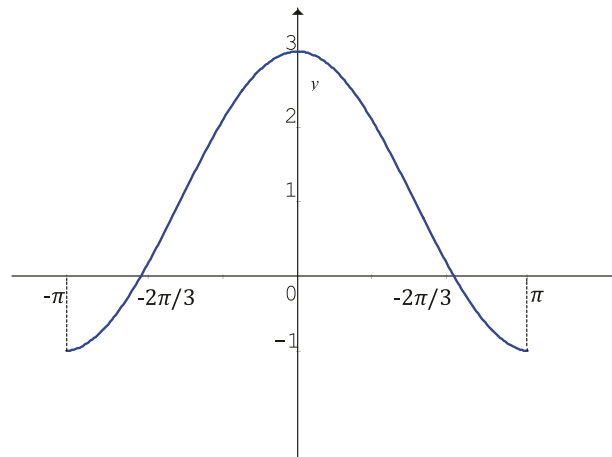
Máximo em $x = 0$

Mínimos em $x = -\pi; x = \pi$

$$\text{Zeros em } x = -\frac{2\pi}{3}; x = \frac{2\pi}{3}$$

O facto de g ser uma função par e de sabermos, por exemplo, que

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

**Exemplo 3**

Seja h a função real de variável real definida por $h(x) = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

Determinar o seu domínio.

Resolver a equação $h(x) = 1$

Verificar que h é periódica, de período $\frac{\pi}{3}$.

Esboçar o gráfico da restrição de h ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

O domínio da função $y = \operatorname{tg} x$ é, como sabes, o conjunto de todos os números reais diferentes de $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Então

$$D_h = \left\{ x : x \in \mathbb{R} \wedge 3x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ou seja,

$$D_h = \left\{ x : x \in \mathbb{R} \wedge 3x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$h(x) = 1$$

$$\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Se h é periódica, de período $\frac{\pi}{3}$, teremos $h\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = h(x) \quad \forall x$

Deverá ficar,

$$\operatorname{tg}\left(3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right), \forall x \in \mathbb{R}$$

que é equivalente a

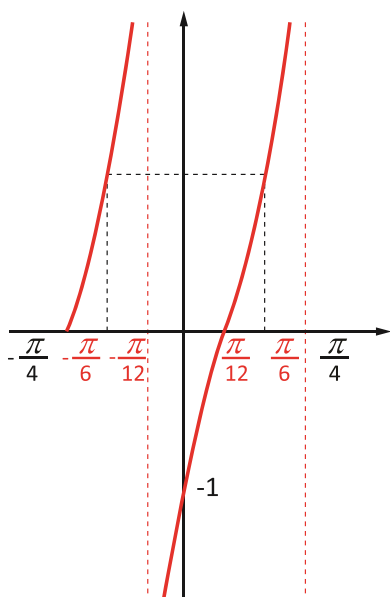
$$\operatorname{tg}\left(3x + \pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right), \forall x \in \mathbb{R}$$

ou seja

$$\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4} + \pi\right) = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right), \forall x \in \mathbb{R}$$

o que é verdadeiro, porque a função tangente é uma função periódica de período π .

Para esboçar o gráfico no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, começamos por marcar os pontos conhecidos e as assíntotas.



Tarefa 46

Considere a função f definida pela expressão

$$f(x) = 5\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} - 3\right)$$

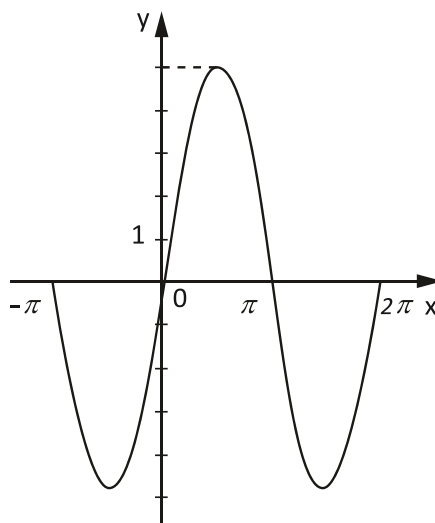
Faz o seu estudo no que respeita as propriedades:

- Domínio e contradomínio
- Periodicidade
- Máximos e mínimos
- Zeros
- Gráfico

Exemplo 4

Estuda em \mathbb{R} , as funções trigonométricas das quais se apresenta o esboço do seu gráfico, relativo a um determinado intervalo.

a) $y = 5\text{sen}x$, no intervalo $[-\pi, 2\pi]$



Observamos que:

Período: 2π (porquê?)

Domínio: \mathbb{R}

Contradomínio: $[-5, 5]$

Monotonia

No intervalo $[-\pi, 2\pi]$, o quadro de monotonia é apresentado a seguir:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		2π
$y=5.\text{sen}x$	0	↘	-5	↗	0	↗	5	↘	0	↗	0

Então, em \mathbb{R} a função é:

Crescente: $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$

Decrescente: $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$

Tarefa 47

Seja $f(x) = \frac{5 - \text{sen}x}{2}$

uma função real de variável real

a) Determina o contradomínio de f

b) Determina a expressão geral dos maximizantes

c) Determina a expressão geral dos minimizantes

d) Indica um intervalo onde a função é decrescente

Máximos: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Mínimos: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Variação de sinal

No intervalo $[-\pi, 2\pi]$, o quadro de variação de sinal é o seguinte:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		2π
$Y=5.\text{sen } x$	0	-	-5	-	0	+	5	+	0	-	0

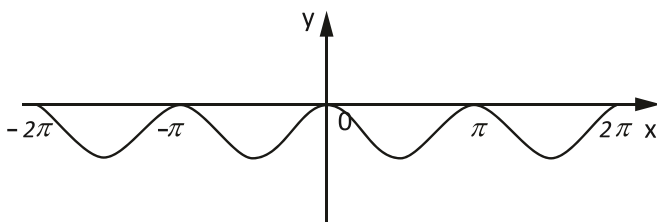
Em \mathbb{R} , a função:

Zeros: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Positiva: $]2k\pi, \pi + 2k\pi[$

Negativa: $]-\pi + 2k\pi, 2k\pi[$

b) $y = \cos^2 x - 1$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$



Em \mathbb{R} , a função tem:

- Domínio: \mathbb{R}
- Contradomínio: $[-1, 0]$
- Os máximos são os zeros: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Mínimos: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Sempre negativa, excepto nos zeros.
- Negativa: $]-\pi + 2k\pi, 2k\pi[, k \in \mathbb{Z}$

Tarefa 48

Para cada $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a expressão $f(x) = \text{sen}(kx)$ é uma função trigonométrica.

a) Mostra que f é periódica de

período $\frac{2\pi}{k}$

b) Considera a função

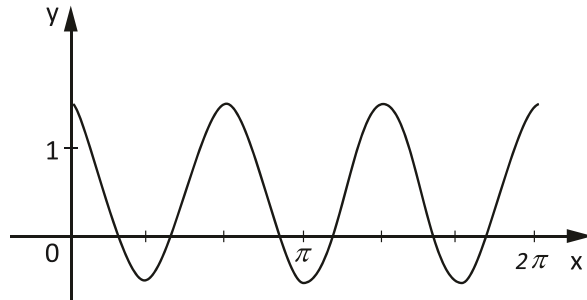
$f(x) = \text{sen}(3x)$

b1) Indica o período da função.

b2) Representa graficamente a função dada

b3) determina o contradomínio de f .

c) $y = \frac{1}{2} + \cos(3x)$, no intervalo $[0, 2\pi]$



Em \mathbb{R} , a função tem:

- Domínio: \mathbb{R}
- Contradomínio: $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$
- Máximos: $x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
- Mínimos: $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Modelação e trigonometria

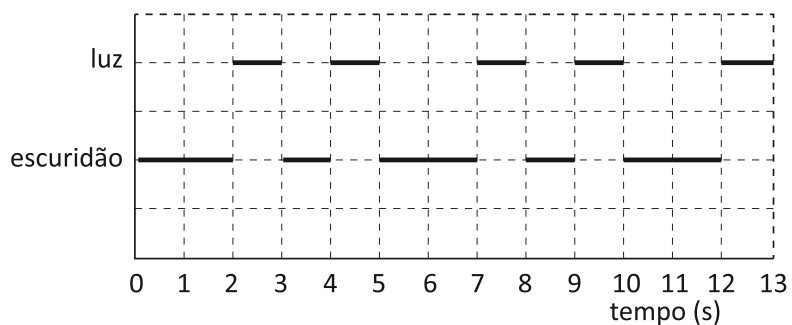
As funções circulares são periódicas (o seno e cosseno têm período 2π e a tangente e cotangente π).

As aplicações destas funções são importantes e variadas. Muitos fenómenos naturais têm carácter periódico, tais como as ondas sonoras, as vibrações das cordas de uma viola, as ondas luminosas ou de rádio, as oscilações de um pêndulo, as marés etc.



Exemplo 1

Os faróis de sinalização são torres, com um sinal luminoso no topo, que ajudam os navios a descobrirem a sua rota à noite, quando navegam próximo da costa. O sinal de um farol emite feixes luminosos, de acordo com uma sequência regular. Cada farol tem a sua própria sequência. No diagrama seguinte, vê-se a sequência de feixes de um certo farol. Os feixes luminosos alternam com períodos de escuridão.



Trata-se de uma sequência regular. Ao fim de um certo tempo, a sequência repete-se. A duração de uma sequência completa, até ao instante imediatamente antes de se repetir, chama-se *período*.

Quando se descobre o período de uma sequência, é fácil continuar o diagrama pelos segundos, minutos ou até mesmo horas seguintes.

Questões:

1. Qual o período que corresponde à sequência deste farol?

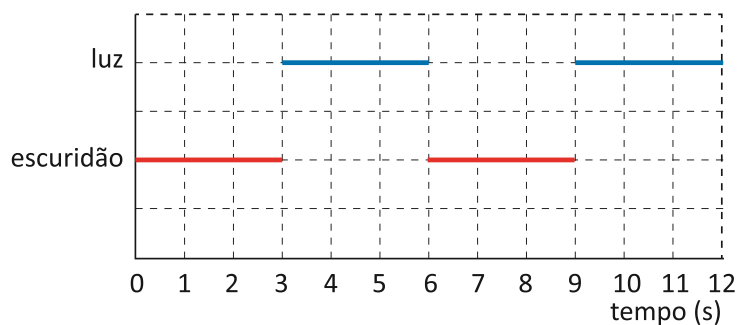
Resposta: A sequência repete-se de 5 em 5 segundos, pelo que é de 5 segundos o período.

2. Ao longo de um minuto, durante quantos segundos é que o farol emite feixes luminosos?

Resposta: Se em cada 5 segundos, 2 são de luz, em 60, 24 são de luz porque em 60 segundos há 12 períodos de 5 segundos.

3. Desenha o gráfico de uma possível sequência de feixes luminosos de um farol que emita feixes luminosos durante 30 segundos, em cada minuto. O período desta sequência deve ser igual a 6 segundos.

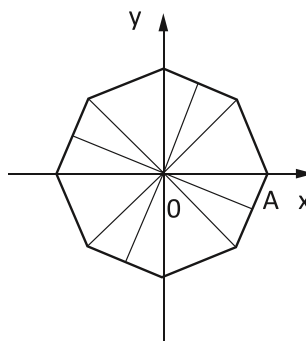
Resposta: No quadriculado seguinte, está representado um possível gráfico de uma possível sequência de feixes luminosos de um farol que emita feixes luminosos durante 30 segundos, em cada minuto. O período desta sequência deve ser igual a 6 segundos.



Exemplo 2



Considera um moinho de vento e a representação no plano do respectivo sistema das hastes num referencial, tal como é esquematizado na figura.



Seja A o ponto que representa a extremidade de uma das hastes das velas, O o cento de rotação e OA a unidade do referencial o.n. xOy .

No movimento das hastes do moinho em torno do ponto O, seja x a medida da amplitude, em radianos, do arco descrito pelo ponto A.

Considere a função f que a cada x faz corresponder a ordenada do ponto A.

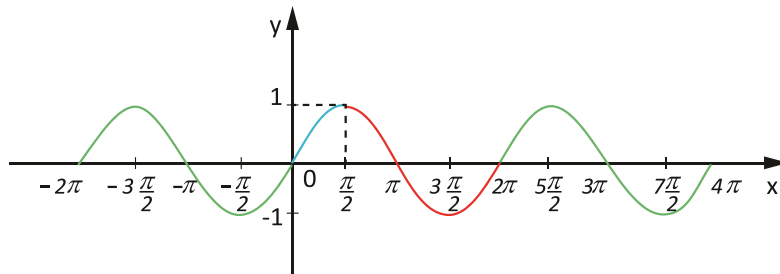
A tabela com as coordenadas do ponto A (ordenada igual ao valor do seno das abcissas) nas várias situações é:

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Uma expressão que define f é $f(x) = \text{sen}x$

A ordenada do ponto A pode, porque representa o seno da abcissa, tomar valores entre -1 e 1 . Daqui resulta que $\text{CD}f = [-1, 1]$.

Na figura está a azul parte de uma representação gráfica de f no intervalo de $[0;2\pi]$.



- O prolongamento a vermelho resulta de, no 2º quadrante, os valores de ângulos suplementares dos do primeiro quadrante terem senos iguais, a curva em $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ é simétrica, em relação ao eixo de equação $x = \frac{\pi}{2}$. Em $[\pi, 2\pi]$ a função toma, para valores simétricos do ângulo em relação a π , valores simétricos dos que tomou em $[0, \pi]$
- O prolongamento a verde ao intervalo $[-2\pi, 4\pi]$ resulta de o período ser 2π e por isso basta repetir o gráfico já obtido, desenhando em $[-2\pi, 0]$ e em $[2\pi, 4\pi]$ curvas iguais à desenhada em $[0, 2\pi]$.
- O período da função definida, em \mathbb{R} , por $f(x) = \text{sen}(x)$ é $P=2\pi$.
Porque, dado qualquer x , $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x)$ e, então, o menor valor positivo P que satisfaz a condição $f(x + P) = f(x)$ é $P=2\pi$.

Exemplo 3

Tendo por base os dados de uma tabela, contendo as previsões das alturas da maré num porto marítimo, publicada pelo Instituto Hidrográfico, obteve-se, por regressão sinusoidal (com recurso a uma calculadora gráfica) a seguinte expressão:

$$M(t) = 0,655\text{sen}(0,483t - 7,756) + 2,019 \text{ para } t \geq 0$$

Esta expressão relaciona a altura da maré, M , em metros, com o tempo, t , em horas, contado a partir das zero horas de determinado dia.

Considerando a definição analítica da função, responde às seguintes questões (o argumento da função seno está em radianos):

Tarefa 49

O nobre cavaleiro D. Quixote de la Mancha investe furiosamente contra um moinho de vento, ficando preso em uma das suas velas, sendo levado por esta no seu movimento de rotação.



O seu escudeiro Sancho Pança vai em seu auxílio. A altura, h , a que o cavaleiro se encontra do solo, desde o instante em que o seu escudeiro chega ao moinho até o soltar da vela, é dada em função do tempo t , em segundos por:

$$h(t) = 3 + 2\text{sen}\left(\frac{\pi t}{30}\right), t \in [0, 165]$$

- A que altura se encontra D. Quixote no instante em que o escudeiro chega ao moinho?
- Determina a altura máxima atingida pelo cavaleiro e os instantes a que isso aconteceu.
- Determina os instantes em que a altura de D Quixote é mais favorável à ajuda do seu escudeiro.

1.1. Entre que valores varia a maré?

1.2. De quanto em quanto tempo se repete a preia-mar (mará alta)?

Resolução:

1.1. Sabemos que:

$$-1 \leq 0,655\text{sen}t \leq 1, \forall t \geq 0$$

$$-1 \leq \text{sen}(0,483t - 7,756) \leq 1$$

$$-0,655 \leq 0,655\text{sen}(0,483t - 7,756) \leq 0,6$$

$$0,655 + 2,019 \leq 0,655\text{sen}(0,483t - 7,756) + 2,019 \leq 0,655 + 2,019$$

$$1,364 \leq 0,655\text{sen}(0,483t - 7,756) + 2,019 \leq 2,674$$

Assim, a maré varia entre 1,364 metros a 2,674 metros.

1.2. Uma função diz-se periódica se existir um número P tal que, qualquer que seja o número real x se verifica a condição

$$f(x+P) = f(x)$$

No nosso caso, temos

$$M(t+P) = M(t)$$

$$0,655\text{sen}(0,483(t+P) - 7,756) + 2,019 = 0,655\text{sen}(0,483t - 7,756) + 2,019$$

$$\text{sen}(0,483(t+P) - 7,756) = \text{sen}(0,483t - 7,756)$$

$$0,483(t+P) - 7,756 = 0,483t - 7,756 + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$0,483t + 0,483P = 0,483t + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$P = \frac{2\pi}{0,483}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$P = 13k, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Para $k=1$, obtemos $P = 13$

O que significa que a preia-mar se repete de 13 em 13 horas.

Exercícios e problemas

1. Simplifica cada uma das seguintes expressões:

1.1. $\sin(\pi - x) + \cos(x - \pi)$

1.2. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) + \sin(\pi - x)$

1.3. $\operatorname{tg}(7\pi + x) + \cos(7\pi + x)$

1.4. $\sin(\frac{\pi}{2} + x) + \cos(\frac{3\pi}{2} - x)$

1.5. $\operatorname{cotg}(5\pi - x) + \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x)$

1.6. $\sin(\frac{7\pi}{2} - x) - \sin(x - \frac{5\pi}{2})$

1.7. $\sin(x - \frac{3\pi}{2}) - 2 \cos(x + \frac{\pi}{2}) - \operatorname{tg}(x - 5\pi)$

2. Sabendo que $\sin x = \frac{4}{5}$ e que $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ determina cada uma das seguintes expressões:

2.1. $5 \cos x + 3 \operatorname{tg} x$

2.2. $\sin(x - \pi) + \cos(\frac{\pi}{2} + x)$

2.3. $\operatorname{cotg}(\pi - x) + \operatorname{tg}(x - \pi)$

3. Sabendo que $\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2}) = \frac{5}{12}$ e que x representa um número real do intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, determina:

3.1. $4 \operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x$

3.2. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x$

3.3. $\sin x + \cos x$

3.4. $\cos(\pi + x) - \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) - \sin(\frac{3\pi}{2} - x)$

4. Resolve, em \mathbb{R} , as equações:

4.1. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{3})$

4.2. $\operatorname{cotg} x = \sqrt{3}$

4.3. $\sin x = \sin(\frac{\pi}{4})$

4.4. $\sin x = \sin(-\frac{\pi}{2})$

4.5. $\cos x = \cos(\frac{3\pi}{4})$

4.6. $\cos(3x) = \frac{1}{2}$

4.7. $\sin x = -\sin(\frac{5}{6}\pi)$

4.8. $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$4.9. \sin(2x) = \sin x$$

$$4.10. \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$4.11. \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

$$4.12. \cotg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \tg x$$

5. Utilizando uma calculadora científica, determina uma solução de cada uma das equações, em R:

$$5.1. \sin x = 0,841471$$

$$5.2. \cos x = 0,5$$

$$5.3. \tg x = 14,10142$$

$$5.4. \sin x = -2$$

6. Considera as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) = 2 \sin x$$

$$g(x) = 1 - \cos(2x)$$

$$h(x) = \tg^2 x$$

determina,

$$6.1. f(-x);$$

$$6.2. g(-x);$$

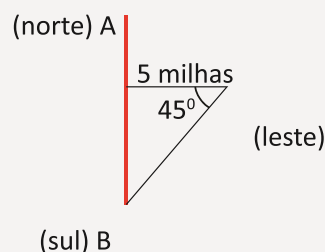
$$6.3. h(-x)$$

e tira conclusões quanto à paridade das funções.

7. Um barco deveria sair do porto da cidade A e ir até o porto da cidade B em linha reta, (no sentido norte-sul). Entretanto, uma forte corrente fez com que o barco sofresse um desvio de na direcção leste.

O comandante efetuou uma correção no rumo no barco de 45° para a esquerda, de modo a reencontrar a rota original, tal como descrito na figura.

Se o barco percorreu 5 milhas na direcção leste, quanto teve que navegar para retornar á rota original?



8. Admite que, num certo dia, a temperatura, em graus Celsius ($^\circ\text{C}$), num laboratório, é dada por :

$$f(t) = 20 + 4 \cos\left[\frac{\pi(t+10)}{12}\right], t \in [0,24]$$

Nesta expressão:

- a variável t representa o tempo, em horas, contado a partir das zero horas desse dia;

- o argumento da função co-seno é medido em radianos.

a) Entre as 6 e as 10 horas da manhã, a temperatura no laboratório aumentou. De quanto foi esse aumento de temperatura?

b) Pretende-se desenvolver uma cultura de bactérias no mesmo laboratório. Para o efeito, devem ser respeitadas as seguintes condições,

I) a temperatura não pode ser superior a 22 °C mais de 10 horas consecutivas; relativamente à temperatura no laboratório naquele dia.

II) a diferença entre os valores das temperaturas máxima e mínima não pode ultrapassar 9 °C;

III) nas primeiras 5 horas do dia, a temperatura tem de ser sempre inferior a 19 °C.

Elabora uma pequena composição na qual refira se cada uma das condições, I), II) e III), é ou não cumprida, explicitando, para cada caso, uma razão que fundamente a sua resposta.

(Adaptado de fase especial 2009)

9. Na figura, está representado um pêndulo simples, E, oscilando no plano DAB.

Quando um pêndulo oscila à superfície da Terra, o plano de oscilação não se mantém fixo, vai rodando ao longo do

tempo, em torno de um eixo vertical, representado na figura por CD, devido ao movimento de rotação da Terra. O tempo que decorre entre o início da oscilação do pêndulo e o momento em que o plano de oscilação do pêndulo completa uma rotação de 360° designa-se por *período*. Este período não é o mesmo em todos os lugares da Terra, pois depende da latitude do lugar em que se realiza

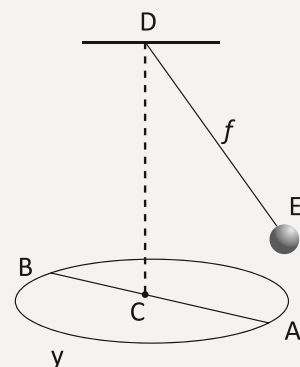
a experiência. Vamos considerar apenas lugares do hemisfério norte. A relação entre o período, T, medido em horas, e a latitude do lugar, q, medida em graus, estabelecida por Jean Foucault (1819- 1868), em 1851, é

$$T = \frac{24}{\sin(q)} \quad (\text{Lei do seno de Foucault})$$

a) Mostra que, no Pólo Norte, o pêndulo tem um período de 24 horas. Recorda que a latitude no Pólo Norte é de 90°.

b) A latitude de Paris, onde Foucault realizou a experiência que confirmou a referida lei, é, aproximadamente, de 49°. O João declarou ter feito uma experiência semelhante à de Foucault, nas mesmas condições, tendo obtido o valor de 48 horas para o período do pêndulo. Num pequeno texto e usando apenas a lei do seno de Foucault:

- indica o período que Foucault terá registado na sua experiência de 1851;
- indica a latitude do local em que o João terá feito a sua experiência;
- comenta, fundamentadamente, a possibilidade de a experiência do João poder ter sido realizada em Portugal Continental, sabendo que Portugal Continental está compreendido entre, aproximadamente, as latitudes 36° e 42°



M E T A S

Reconhecer as propriedades gráficas e analíticas das funções exponenciais e logarítmicas

Resolver condições exponenciais e logarítmicas

Resolver problemas em contexto real usando funções exponenciais ou funções logarítmicas

Definir limite de uma função num ponto

Calcular limites e resolver indeterminações;

Reconhecer funções contínuas num ponto e num intervalo

Aplicar o Teorema de Bolzano

Determinar as equações das assíntotas verticais e não verticais aos gráficos das funções estudadas



Unidade Temática 3 | Funções e Limites

Subtema 1 - Funções exponenciais e logarítmicas

Subtema 2 - Limites e continuidade

Conteúdos

Revisão do conceito de potência

Logaritmo de um número positivo

Função logarítmica

Equações e inequações com exponenciais e logaritmos

Modelos de crescimento

Função logística



Subtema 1 - Funções Exponenciais e Logarítmicas

Os conhecimentos sobre funções exponenciais e logarítmicas são fundamentais para uma melhor compreensão de fenómenos, tais como: determinar índices de crescimento de uma determinada população (Geografia), estudar a evolução de uma colónia de bactérias (Biologia), cálculo dos níveis de propagação dos sismos (Geologia), na avaliação da desintegração radioativa (Química) ou ainda, para a fixação de taxas de juro (Economia).

De um modo geral, usa-se o termo crescimento em exponencial para descrever um crescimento ou decrescimento muito acentuado.

Revisão do conceito de potência

Na álgebra, as potências naturais de um número real a estão definidas por

$$a^n = a \times a \times a \times \dots \times a \text{ (} n \text{ fatores)}$$

Sendo a e b números reais positivos e x e y números inteiros ou racionais, são válidas as seguintes regras operatórias com potências:

- $a^0 = 1$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, a \neq 0$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}, a \neq 0$
- $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x} = (\sqrt[y]{a})^x, x, y \in \mathbb{R}^+, a \geq 0$

Repara que, se a é um número negativo então algumas das potências fracionárias de a terão valores imaginários (por exemplo, $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$). Estes casos serão estudados mais adiante. Além disso, as regras operatórias definidas não incluem as potências *irracionais*, tais como:

$$2^\pi, 3^{\sqrt{2}}, \pi^{-\sqrt{3}}.$$

Há várias maneiras de definir potências irracionais.

Por exemplo, para definir 2^π , começamos com uma representação decimal de $\pi = 3,1415926\dots$ e, depois tentamos formar uma sequência de potências de números racionais que estão cada vez mais próximos de π .

Ou seja, $2^{3,1}, 2^{3,14}, 2^{3,141}, 2^{3,1415}, 2^{3,14159}, 2^{3,14159\dots} \rightarrow 2^\pi$

Uma vez que os expoentes dos termos desta sequência tendem para o valor π , é de aceitar que a sequência anterior tenda para o valor de 2^π .

Exemplo:

A tabela ao lado, mostra-nos que a sequência anterior tem um limite, que para quatro casas decimais, o seu valor é $2^\pi \approx 8,8250$.

Funções, tais como: $f(x) = x^3$, $f(x) = x^{-2}$, $f(x) = x^\pi$ são funções algébricas, uma vez que têm uma base variável e um expoente constante.

x	2^x
3	8,000000
3,1	8,574188
3,14	8,815241
3,141	8,821353
3,1415	8,824411
3,14159	8,824962
3,141592	8,824974

Se a base é constante e o expoente variável então, diz-se que

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma $f(x) = b^x$, $x \in \mathbb{R}, b > 0$ é uma **função exponencial de base b** .

Alguns exemplos são:

$$f(x) = 2^x; \quad f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad f(x) = \pi^x; \dots$$

Seja $f(x) = y = b^x$:

Se, $b = 0$ e $x \in \mathbb{R}^+$, então $y=0$ é a função constante (nula) em \mathbb{R}^+

Se $b = 0$ e $x \in \mathbb{R}^-$, então y não tem significado.

Se $b = 1$ e $x \in \mathbb{R}$, então $y=1$ é uma função constante.

Se $b < 0$ e $x \in \mathbb{R}$, então y nem sempre é um número real.

Nota

Repara que $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ que não é um número real.

Se $b > 0$ e $b \neq 1$ e $x \in \mathbb{R}$, então $y = b^x$ representa **uma função exponencial** com as seguintes propriedades analíticas:

- Domínio é \mathbb{R} e contradomínio é \mathbb{R}^+ .
- A função não tem zeros e é sempre positiva.
- A função é injetiva. Ou seja,

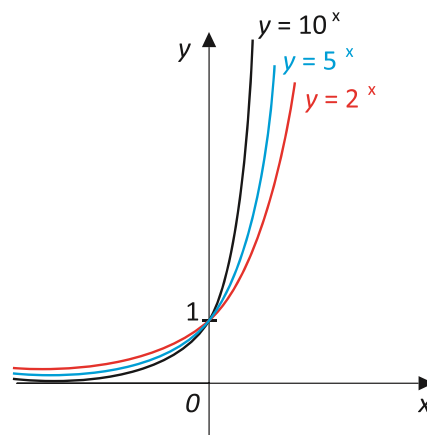
$$b^{x_1} = b^{x_2} \text{ então } x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Se $b > 1$,

- a função é estritamente crescente. Ou seja:

$$x_1 < x_2 \text{ então } b^{x_1} < b^{x_2}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

- O gráfico de f aproxima-se do eixo Ox quando x decresce indefinidamente. Dizemos que o eixo Ox é **uma assíntota horizontal** do gráfico de f .



Para valores positivos de x a função cresce tão mais rapidamente quanto maior for a base b . Para valores negativos de x a função cresce tão mais lentamente quanto maior for a base b .

Se $0 < b < 1$,

- a função é estritamente decrescente. Ou seja,

$$x_1 > x_2 \text{ então } b^{x_1} < b^{x_2}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

- o gráfico de f aproxima-se do eixo Ox quando x cresce indefinidamente. Dizemos que o eixo Ox é **uma assíntota horizontal** do gráfico de f .

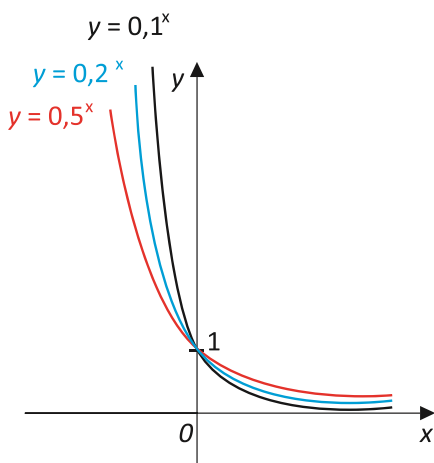
Tarefa 1

Representa graficamente as seguintes funções:

$$f(x) = 2^x$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

- Estuda as duas funções
- Que diferenças se observam entre estas duas funções



Para valores positivos de x a função decresce tão mais lentamente quanto menor for a base b . Para valores negativos de x a função decresce tão mais rapidamente quanto menor for a base b .

Quando a base é o número irracional e , “ $e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045\ \dots$ ”, conhecido como “constante de Euler” ou “número de Neper”, a função definida por $f(x) = e^x$ designa-se de **função exponencial natural**.

Logaritmo de um número positivo

Quando os logaritmos foram introduzidos por John Napier, no século XVII, vieram permitir aos cientistas da época um poder de cálculo até então inimaginável.

Considera, por exemplo, a equação:

$$2^x = 12 \text{ Qual será o valor de } x?$$

$$\text{Ora, sabemos que } 8 < 12 < 16 \Rightarrow 2^3 < 2^x < 2^4.$$

$$\text{Então, } 3 < x < 4.$$

$$\text{Ou seja, existe } x \approx 3,58496, \text{ tal que } 2^{3,58496} \approx 12.$$

Tarefa 2

Considera as funções definidas em \mathbb{R} por:

$$f(x) = 4^x ; \quad g(x) = 3^{-x}$$

$$h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x ; \quad i(x) = 3^{2x}$$

a) Indica quais as funções que representam um crescimento ou um decrescimento exponencial.

b) Representa graficamente cada uma das funções. Que conclusões?

Referência histórica

Leonhard Paul Euler
(1707-1783),

Nascido em Basileia- Suíça, publicou mais de 900 obras matemáticas. A Euler deve-se, por exemplo, a designação da letra e para representar o limite da sucessão de termo geral $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e que corresponde ao número irracional e .

Estamos em presença de uma nova relação em que se pretende determinar qual o expoente a que é necessário elevar uma determinada base (no exemplo, base 2) para se obter um número y (no exemplo, $y = 12$).

Referência histórica

A palavra “LOGARITMO” foi inventada por um matemático escocês, John Napier (1550-1617), a partir das palavras gregas “LOGOS” – razão – e “ARITMOS”.



Chama-se **logaritmo de um número positivo x na base b** , com $b \in \mathbb{R}^+$ e $b \neq 1$, ao número y tal que: $b^y = x$ e representa-se por $\log_b x$. Ou seja, $\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x, x \in \mathbb{R}^+$.

Exemplo:

$$\log_{10} 100 = 2 \quad ; \quad \log_{10} 0,0001 = -4 \quad ; \quad \log_2 32 = 5 \quad ;$$

$$(10^2 = 100) \quad (10^{-4} = 0,0001) \quad (2^5 = 32)$$

Da definição de logaritmo, resulta que:

$$b^1 = b, \text{ então } \log_b b = 1$$

$$b^0 = 1, \text{ então } \log_b 1 = 0$$

$$x = \log_b b^x, \text{ ou}$$

$$x = b^{\log_b x}$$

E ainda as seguintes propriedades operatórias dos logaritmos que permitem transformar as operações de multiplicação em adição e as divisões em subtrações.

Propriedade 1

O logaritmo do produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores.

Simbolicamente, temos $\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y, x, y \in \mathbb{R}^+$.

Verificamos que:

$$\text{se } x > 0 \text{ e } y > 0, \text{ então pela definição, } b^{\log_b (x \cdot y)} = x \cdot y$$

$$\text{e } b^{\log_b x + \log_b y} = b^{\log_b x} \cdot b^{\log_b y} = x \cdot y,$$

$$\text{Ou seja, } \log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y.$$