

$$f^{iv}(x) = 192$$

$$f^v(x) = f^{vi}(x) = \dots = f^n(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

b) $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$

Ora,

$$f'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{8} e^{\frac{x}{2}}$$

$$f^{iv}(x) = \frac{1}{16} e^{\frac{x}{2}}$$

sucessivamente...

$$f^n(x) = \frac{1}{2^n} e^{\frac{x}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Aplicação das derivadas na física

Se uma função $s(t)$ descreve a posição de um corpo em movimento, no instante t , então $s'(t)$ fornece a taxa de variação instantânea do movimento, isto é, a velocidade deste corpo no instante t .

Por sua vez, a segunda derivada $s''(t)$ fornece a taxa de variação instantânea de $s'(t)$, ou seja, a taxa de variação da velocidade, que é conhecida como aceleração no instante t .

Exemplo:

Uma partícula move-se ao longo de uma reta de acordo com a seguinte equação de movimento:

$s(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{4t}{t+1}$, onde s (centímetro) é a distância orientada da partícula até a origem em t (segundos).

Se v (em cm por segundo) for a velocidade instantânea e se a (em cm por segundo quadrado) for a aceleração, determina: t, s, v quando a aceleração é nula.

Tarefa 14

Calcula as derivadas sucessivas até à ordem n indicada.

a)

$$f(x) = 3x^4 - \sin(2x); \quad n = 5$$

b) $g(x) = \frac{1}{e^x}; \quad n = 4$

c) $h(x) = x^2 e^{-x}; \quad n = 4$

Nota

Se $s''(t) > 0$, o corpo está em aceleração e se $s''(t) < 0$, o corpo está em desaceleração.

Tarefa 15

Uma bola de futebol é chutada para cima na vertical a uma velocidade de 80 pés/segundo. A sua altura t segundos após o chute é dada por $a(t) = 80t - 16t^2$.

a) Qual a velocidade da bola quando atingir 96 pés de altura acima do solo?

b) Qual a desaceleração da bola nos dois primeiros segundos após o chute?

c) Qual a altura máxima atingida pela bola? Em que instante isso ocorre?

Tarefa 16

Um Distrito é atingido por uma doença epidémica. O Ministério da Saúde calcula que o número de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia) é, aproximadamente, dado por:

$$e(t) = 64t - \frac{t^3}{3}.$$

- Qual a variação da epidemia no 4º dia? E, no 8º dia?
- Qual o número máximo de pessoas atingidas pela doença?
- Ao fim de quanto tempo já não havia pessoas doentes?

Resolução:

Sabemos que:

$$v(t) = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{4t}{t+1}\right)' = \left(\frac{t^2}{2}\right)' + \left(\frac{4t}{t+1}\right)' = \frac{1}{2} \times 2t + \frac{4(t+1) - 4t(t+1)'}{(t+1)^2} =$$
$$t + \frac{4t + 4 - 4t}{(t+1)^2} = t + \frac{4}{(t+1)^2}$$

$$a(t) = \left(t + \frac{4}{(t+1)^2}\right)' = (t') + \left(\frac{4}{(t+1)^2}\right)' = 1 - \frac{8(t+1)}{(t+1)^4} =$$
$$= 1 - \frac{8}{(t+1)^3}, \text{ com } t+1 \neq 0$$

Tomando $a = 0$ teremos:

$$1 - \frac{8}{(t+1)^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{(t+1)^3 - 8}{(t+1)^3} = 0 \Leftrightarrow (t+1)^3 - 8 = 0 \wedge (t+1)^3 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow t+1 = 2 \wedge t \neq -1 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\text{Quando } t = 1, \text{ temos: } s(1) = \frac{1}{2} + \frac{4}{1+1} = \frac{5}{2} \text{ e } v(1) = 1 + \frac{4}{(1+1)^2} = 2.$$

Portanto, a aceleração é nula 1 segundo após o início do movimento, quando a partícula está a $\frac{5}{2}$ cm da origem, movendo-se para a direita, com uma velocidade de 2 cm/seg.

Exemplo:

A distância percorrida por um paraquedista t (segundos) após ter aberto o seu paraquedas é dada, em metros, aproximadamente, por:

$d(t) = 25 + 6t - 25e^{-1,7t}$. Determina a desaceleração na queda, três segundos após a abrir o paraquedas (arredondado às centésimas).

Resolução:

A aceleração é obtida através do estudo da 2ª derivada. Assim,

$$d'(t) = 6 - 25 \times (e^{-1,7t})' = 6 - 25 \times (-1,7t)' \times e^{-1,7t}$$
$$= 6 - 25 \times (-1,7) \times e^{-1,7t} = 6 + 42,5e^{-1,7t}$$

E a segunda derivada,

$$d''(t) = (6 + 42,5e^{-1,7t})' = 42,5 \times (-1,7)e^{-1,7t} = -72,25e^{-1,7t}$$

Então, após 3 segundos temos, $d''(3) = -72,25e^{-1,7 \times 3} \approx -0,4404$.

Ou seja, a desaceleração é, aproximadamente, $-0,44 \text{ m/s}$

Tarefa 17

Um Taxi seguia a uma velocidade dada em cada instante pela expressão

$$V(t) = -3t^2 + 24t.$$

A sinalização existente em todo o percurso não permite exceder os 60km/h. Verifica, por processos analíticos, se o Taxi excedeu a velocidade permitida.

Aplicação na economia

Em economia e contabilidade, dada uma função $y = f(x)$ costuma-se utilizar o conceito de *função marginal* para avaliar o efeito causado em $f(x)$ por uma pequena variação de x unidades. Ou seja:

Custo marginal (C_{mg}) Variação do custo total decorrente da variação de uma unidade na quantidade produzida.

Receita marginal (R_{mg}) Variação na receita total gerada pela venda de uma unidade na quantidade vendida do bem. $\frac{R(x)}{x} = p$, onde p é a demanda da produção e x o número de unidades produzidas.

Lucro marginal (L_{mg}) Variação do lucro/prejuízo total. $L(x) = R(x) - C(x)$ gerado na comercialização das unidades.

Exemplo:

Supõe que a função custo (em dólares) de x unidades de um produto é $C(x) = 10000 + 5x + 0,01x^2$. Então, a função derivada $C'(x) = 5 + 0,02x$ representa o custo marginal para um nível de produção de x unidades.

Ou seja, se forem produzidas 500 unidades, o custo marginal será de $c'(500) = 5 + 0,02 \times 500 = 15$ dólares (por item).

Exemplo:

Se x unidades de um produto são vendidas a um preço p (dólares) por unidade, então a receita de faturação é dada por $R(x) = x \times p(x)$ dólares

Ora, sabe-se que a equação da procura de um certo produto é

$$p(x) = 60 - 0,05x.$$

A receita de faturação para este produto é dada por:

$$R(x) = x(60 - 0,05x) \text{ e a respectiva receita marginal dada por:}$$

$$R'(x) = 60 - 0,1x,$$

Sabemos que $R'(x) = 0 \Rightarrow 60 - 0,1x = 0 \Leftrightarrow x = 600$.

Logo, para $x = 600$ unidades temos $R(600) = 600(60 - 0,05 \times 600) = 18000$ (dólares) - valor de receita de faturação extrema (máximo).

Tarefa 18

18.1) Considera, em \$US, a função custo:

$$C(x) = 0,01x^3 - 0,5x^2 + 300x + 100$$

Determina o custo marginal para 10 unidades de um certo produto.

18.2) Dada a função receita, em \$US $R(x) = -2x^2 + 1000x$, determina a receita marginal para 50 unidades.

18.3) A empresa tem uma capacidade de produção máxima de 200 unidades por semana. A função procura do produto é $p = -0,2x + 900$ e a função custo semanal é $C(x) = 500 - 8x + x^2$. Qual o preço que deve ser cobrado para maximizar o lucro?

Tarefa 19

Um agricultor quer vedar com rede um terreno retangular encostado a um dos lados da sua casa. Calcula quais as dimensões do terreno com maior área a ser vedado, usando 40 metros de rede.

Tarefa 20

Encontra dois números x e y cuja soma seja um dado número positivo S e cujo produto P seja o maior possível.

Tarefa 21

Uma caixa sem tampa deve ser construída com base quadrada e área total constante C . Determine os lados da caixa de modo que o volume seja máximo.

Otimização

A otimização está relacionada com a escolha da melhor alternativa para a resolução de um problema com base em critérios específicos de maximização ou minimização. Por exemplo, quando um médico pretende conhecer a quantidade mínima de droga que produzirá o efeito desejado nos seus pacientes; quando um produtor necessita determinar a frequência com que equipamentos devem ser substituídos de forma a minimizar os custos de manutenção; ou, na maximização/minimização de áreas, etc.

Exemplo:

Uma lata cilíndrica é produzida a fim de conter 1 litro de óleo. O objetivo é minimizar a quantidade de metal gasto no seu fabrico. Quais devem ser as dimensões da lata?

Resolução:

Ora, sabemos que um cilindro de raio r , ($r > 0$) e altura h , tem como volume: $V = \pi r^2 h$.

Como 1 litro = 1 dm^3 , temos que $1 = \pi r^2 h \Leftrightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$.

A área total do cilindro, em função do seu raio, é dada por

$A_{\text{total}} = 2\pi r h + 2\pi r^2$. Sabendo que $h = \frac{1}{\pi r^2}$ então,

$$A_{\text{total}} = \frac{2\pi r}{\pi r^2} + 2\pi r^2 \Leftrightarrow A_{\text{total}} = \frac{2}{\pi r} + 2\pi r^2$$

Derivando, $A'_{\text{total}} = -\frac{2}{\pi r^2} + 4\pi r$ e igualando a zero, vem que:

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\pi r^2} + 4\pi r = 0 \Leftrightarrow r = \frac{1}{2\pi}.$$

Sendo $\pi \approx 3,1416$ (4cd), temos que a altura $h = \frac{1}{\pi(\frac{1}{2\pi})^2} = 4\pi \approx 12,566$

Logo, uma lata cilíndrica com altura aproximada de 12,566 cm e diâmetro 0,318 cm, a quantidade de metal gasta é mínima.

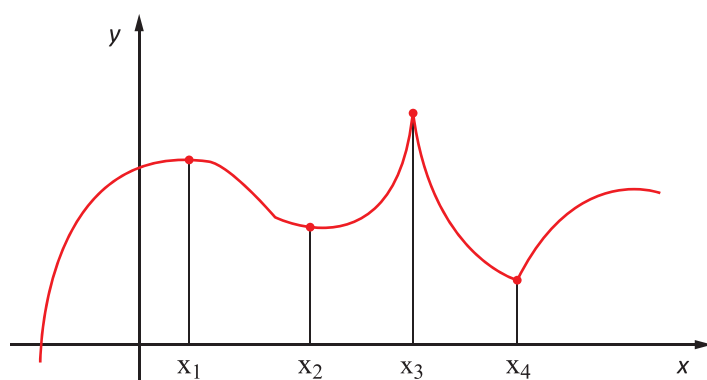
Máximos e mínimos

No gráfico ao lado, percebemos que a parte circulada em vermelho é a mais baixa de sua vizinhança – que está dentro do círculo vermelho – mas não é a mais baixa do gráfico – existe outra bem menor à direita!

Ou seja, diz-se que uma função $y = f(x)$ possui pontos extremos de mínimo (máximo) relativo em x_0 se houver um intervalo aberto contendo x_0 tal que $f(x_0)$ é menor (maior) ou igual a qualquer outro $f(x)$ nesse intervalo.

Nota que os extremos relativos apenas ocorrem nos chamados *pontos críticos*, que são aqueles onde a derivada da função é zero ou onde a função não é derivável (o que pode ocorrer em pontos angulosos ou em descontinuidades).

Considera a figura que representa o gráfico de uma função $y = f(x)$, onde assinalamos os pontos de abscissa x_1, x_2, x_3, x_4 .



- Os pontos assinalados são chamados **pontos extremos** da função.
- Os pontos x_1 e x_3 são **pontos de máximo relativo** (ou local), enquanto que $f(x_1)$ e $f(x_3)$ são **valores máximos relativos**.
- Os pontos x_2 e x_4 são chamados **pontos de mínimo relativo** (ou local), enquanto $f(x_2)$ e $f(x_4)$ são os **valores mínimos relativos**.

Exemplo:

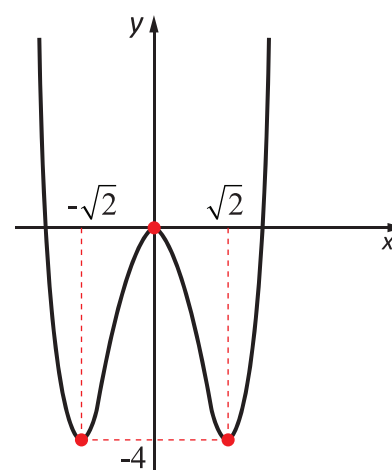
A função definida por $f(x) = x^4 - 4x^2$ tem um ponto de máximo relativo em $x = 0$ e dois pontos de mínimos relativos em $x = \pm\sqrt{2}$. O valor máximo relativo é e o valor mínimo relativo é $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = -4$.

Considera a figura que representa o gráfico de uma função $y = f(x)$, onde assinalamos os pontos de abscissa $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. Os valores de m representam os declives das retas tangentes ao gráfico da função em alguns pontos do seu domínio.

Nota

A parte circulada a **vermelho** indica um ponto **de mínimo relativo**, pois possui o menor valor da função na sua proximidade.

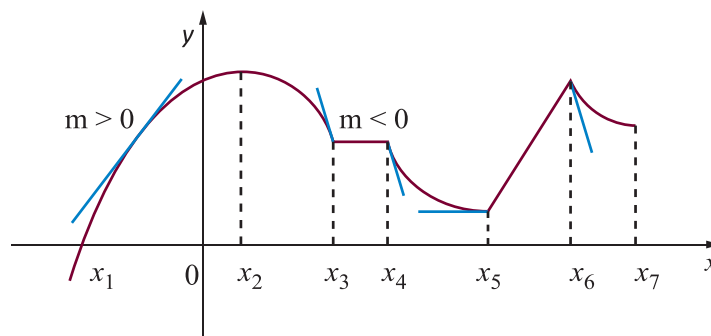
A parte circulada a **verde** indica um ponto **de máximo relativo**, pois possui o maior valor da função na sua proximidade.



Tarefa 22

Encontra os valores mínimos e máximos, se existirem, da função definida por

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 19, \text{ para } x \geq 0$$



Observamos que:

- f é contínua no intervalo $[x_1, x_7]$
- f não é derivável nos pontos x_3, x_4, x_5 e x_6 .
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ([x_1, x_2] \cup [x_5, x_6]) \Rightarrow f$ é estritamente crescente, neste intervalo. O declive das retas é positivo ($m > 0$).
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ([x_2, x_3] \cup [x_4, x_5] \cup [x_6, x_7]) \Rightarrow f$ é estritamente decrescente, neste intervalo. O declive é negativo ($m < 0$).
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in (\{x_2\} \cup [x_3, x_4]) \Rightarrow f$ é constante em $[x_3, x_4]$ e tem um extremo (máximo) relativo no ponto de abscissa x_2 , porque a derivada existe neste ponto e muda de positiva para negativa.
- O ponto de abscissa x_5 é um extremo (mínimo) relativo da função, porque a derivada existe neste ponto e muda de negativa para positiva, neste ponto.
- O ponto de abscissa x_6 é um extremo (máximo) relativo da função, porque a derivada existe e neste ponto e muda de positiva para negativa.

Tarefa 23

Determina os intervalos de monotonia e extremos de cada uma das funções definidas em \mathbb{R} por:

a) $f(x) = (x-2)^2(x+1)$

b) $g(x) = e^x - x^2e^x$

c) $h(x) = x \ln x$

d) $i(x) = \ln(\cos x)$

Concluimos que existe uma relação entre o sinal da derivada e a monotonia da função.

Exemplo:

Determina os intervalos de monotonia e os extremos relativos (se existem) da função definida, em \mathbb{R} , por $h(x) = 2x(x-1)^4$.

Ora, a função é contínua em \mathbb{R} , pelo que os pontos críticos verificam a condição $h'(x) = 0 \Rightarrow 2(x-1)^4 + 8x(x-1)^3 = 0$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^3(x-1+4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 = 0 \vee (5x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{1}{5}$$

Logo, os pontos críticos são $x = 1$ ou $x = \frac{1}{5}$.

	$-\infty$		1				$+\infty$
$(x-1)^3$	-	-	-	-	0	+	+
$5x-1$	-	-	0	+	+	+	+
$h'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$h(x)$	\nearrow		Max	\searrow	min	\nearrow	

Por observação do quadro de sinal da derivada concluímos quais os intervalos em que esta é positiva e negativa e que correspondem aos intervalos de monotonia da função. Ou seja:

- $h'(x)$ é positiva e h é estritamente crescente em $]-\infty, \frac{1}{5}] \cup [1, +\infty[$;
- $h'(x)$ é negativa e h é estritamente decrescente em $[\frac{1}{5}, 1]$;
- Nos pontos críticos, $h(\frac{1}{5})$ é máximo relativo $h(1)$ é mínimo relativo

Extremos de uma função (Teste da primeira derivada):

Seja $c \in Df$ um ponto crítico e x um qualquer outro ponto do domínio da função, na proximidade de c .

- a) Se $f'(x)$ muda de positiva à esquerda para negativa à direita, no ponto c , então $f(c)$ diz-se um máximo relativo (ou local) da função.

	x	c	x
$f'(x)$	+	crítico	-
$f(x)$	\nearrow	Máximo	\searrow

Tarefa 24

Aplica o teste da primeira derivada para determinados extremos relativos de cada uma das funções definidas em \mathbb{R} por:

a) $f(x) = \frac{2x-3}{3x+2}$

b) $g(x) = \sqrt{4-x^2}$

c) $h(x) = \begin{cases} 2 + \frac{x}{2} & , x \leq 0 \\ 2 - 2x & , 0 < x < 1 \\ -3x + 3 & , x \geq 1 \end{cases}$

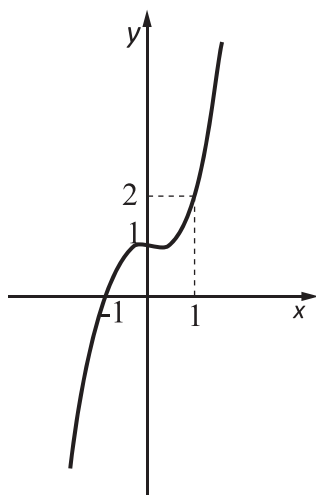
b) Se $f'(x)$ muda de negativa à esquerda para positiva à direita, no ponto c , então $f(c)$ diz-se um mínimo relativo (ou local) da função.

	x	c	x
$f'(x)$	$-$	<i>crítico</i>	$+$
$f(x)$	\searrow	mínimo	\nearrow

c) Se $f'(x)$ não muda de sinal, no ponto c , então $f(c)$ não é extremo da função.

Exemplo:

Aplica o teste da primeira derivada para determinar os pontos críticos e verificar se são extremos do gráfico da função.



a) $f(x) = x^3 + 1$

Verificamos pelo gráfico que a função é contínua em \mathbb{R}

A expressão da sua derivada é $f'(x) = 3x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, zero é o único ponto crítico e tendo em conta que

$3x^2 \geq 0, \forall x$, concluímos que a função é sempre crescente.

b) $f(x) = x^2 - x + 5$

A função é contínua em \mathbb{R} e temos que $f'(x) = 2x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

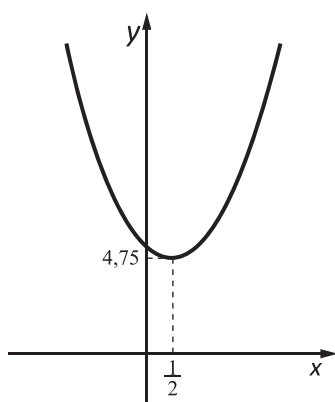
Então, $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, é um ponto crítico

$2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$, a função é crescente

$2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$, a função é decrescente.

O ponto crítico $x = \frac{1}{2}$ é um minimizante relativo, logo $f(\frac{1}{2}) = 4,75$ é

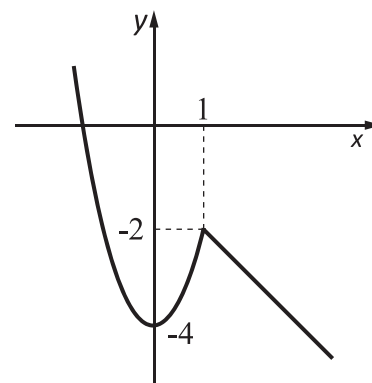
um mínimo relativo da função.



$$c) f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4 & \text{se } x \leq 1 \\ -x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

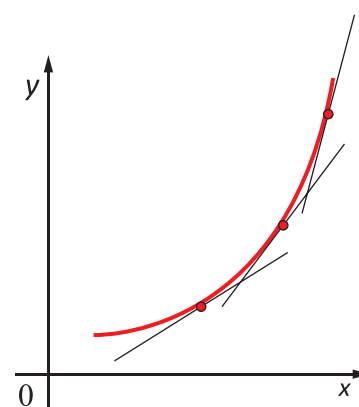
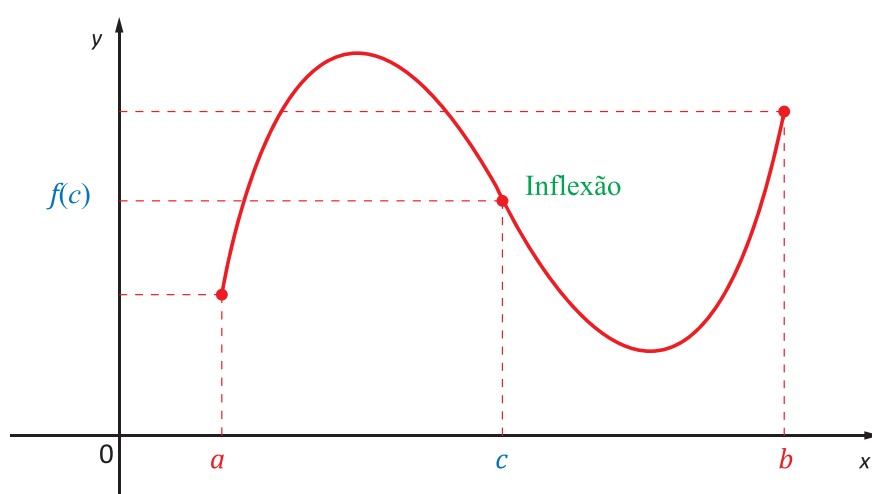
A partir do gráfico observamos que:

- A função é contínua em \mathbb{R} ;
- Para $x \neq 1$, $f'(x) = \begin{cases} 4x & \text{se } x < 1 \\ -1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$;
- f é crescente
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, f é decrescente
- Para $x = 1$, a função não é derivável (justifica!)
- $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Então, os pontos críticos de f são $x = 1$ (máximo relativo) e $x = 0$ (mínimo relativo).



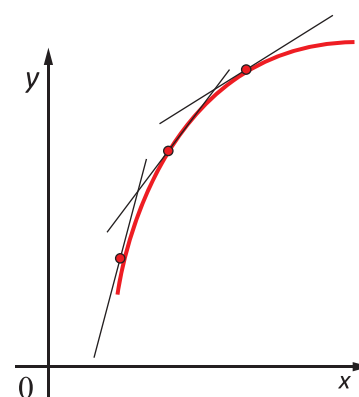
Concavidades do gráfico e inflexões

Seja f uma função derivável (pelo menos até a segunda derivada) em um intervalo $[a, b]$.



No gráfico, observamos:

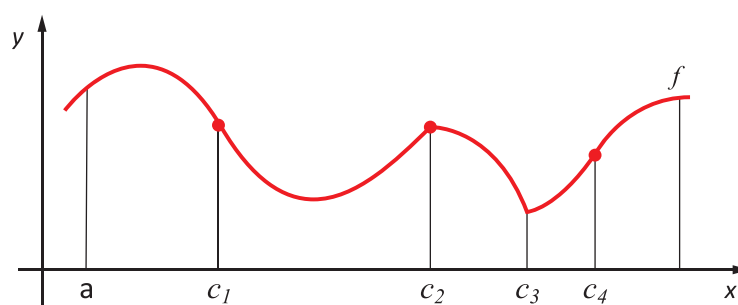
- Para todo $x \in]a, c[$, a curva está abaixo de qualquer das suas tangentes. Então $f''(x) < 0$ e a **concavidade do gráfico da função f é voltada para baixo (convexa)**.
- Para todo $x \in]c, b[$, a curva está acima de qualquer das suas tangentes. Então $f''(x) > 0$ e a **concavidade do gráfico da função f é voltada para cima (côncava)**.



Se a segunda derivada existe no ponto de inflexão, o seu valor tem que ser zero. No entanto, os pontos de inflexão podem ocorrer onde a segunda derivada não existe (**pontos críticos de segunda ordem**).

Um ponto $P(c, f(c))$ do gráfico de uma função contínua é uma inflexão (ou **ponto de inflexão**) se o sentido da concavidade do gráfico muda neste ponto crítico.

Na figura, os pontos de abcissa c_1, c_2, c_3 e c_4 são pontos de inflexão.



Tarefa 25

Estuda as concavidades do gráfico das funções definidas, em \mathbb{R} por:

- a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$
- b) $f(x) = x + e^x$
- c) $f(x) = (x-3) \cdot \ln x$

Observa que:

- Os pontos c_2 e c_3 são pontos extremos relativos de f (f não é derivável nestes pontos).
- Nos pontos c_1 e c_4 existem as derivadas $f'(c_1)$ e $f'(c_4)$.
- Nos correspondentes pontos $(c_1, f(c_1))$ e $(c_4, f(c_4))$ a reta tangente corta o gráfico da função f .

Exemplo:

Estudar a concavidade e as inflexões do gráfico da função definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 - 14x + 10$$

Resolução:

$$f'(x) = x^2 - 5x - 14$$

$$f''(x) = 2x - 5$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ (ponto crítico de 2ª ordem)}$$

Para $x > \frac{5}{2} \Rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow$ A curva do gráfico de f é côncava

Para $x < \frac{5}{2} \Rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow$ A curva do gráfico de f é convexa

O ponto $(\frac{5}{2}, f(\frac{5}{2}))$ é uma inflexão do gráfico de f

Extremos de uma função (Teste da segunda derivada):

Sejam f uma função derivável num intervalo $]a, b[$ e $c \in]a, b[$ um ponto crítico da função f , ou seja $f'(c) = 0$.

Se f admite segunda derivada em $]a, b[$ então temos:

- a) Se $f''(c) < 0$, $f(c)$ é um máximo relativo.
- b) Se $f''(c) > 0$, $f(c)$ é um mínimo relativo.

Exemplo:

Encontrar os máximos e mínimos relativos de f , aplicando o teste da segunda derivada:

a) $f(x) = 18x + 3x^2 - 4x^3$.

Temos, $f'(x) = 18 + 6x - 12x^2$ e $f''(x) = 6 - 24x$.

Fazendo $f'(x) = 0 \Rightarrow 18 + 6x - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{3}{2}$.

Logo, $x = -1 \vee x = \frac{3}{2}$ são pontos críticos de f .

Como, $f''(-1) = 6 - 24 \times (-1) = 30$, positivo, então $x = -1$ é abscissa de um ponto de mínimo relativo de f .

Modo análogo, $f''(\frac{3}{2}) = 6 - 24 \times (\frac{3}{2}) = -30$, negativo, então $x = \frac{3}{2}$ é abscissa de um ponto de máximo relativo de f .

b) $f(x) = 6x - 3x^2 + \frac{1}{2}x^3$.

Temos, $f'(x) = 6 - 6x + \frac{3}{2}x^2$ e $f''(x) = -6 + 3x$.

Fazendo $f'(x) = 0$ e resolvendo a equação, obtemos $x = 2$ como único ponto crítico de f . Como, $f''(2) = 0$ e f'' é uma função contínua que

Tarefa 26

Aplicando o teste da primeira e da segunda derivada, indica se existem, os extremos relativos, pontos de inflexão e concavidades do gráfico das funções definidas por:

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

b) $f(x) = (x^2 - 1)^3$

c) $f(x) = (x - 3)e^x$

d) $f(x) = x \ln x, x > 0$

e) $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$

f) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}, x \neq 1$

muda de sinal neste ponto, então $x=2$ é um ponto de inflexão do gráfico de f . Usando o teste da primeira derivada, concluímos que a função é sempre crescente em \mathbb{R} , logo não existem extremos.

Esboço do gráfico de funções

No estudo de uma função debes começar por identificar se a função pertence a alguma das famílias estudadas (quadráticas, polinomiais, racionais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas,...) e obter uma representação gráfica, caso disponhas de uma calculadora ou computador. Em seguida, debes abordar os seguintes itens:

Domínio: Pode ser dado na caracterização da função, pode ser determinado pelas condições do problema ou pode ser o domínio de existência da expressão analítica $y = f(x)$ que define a função;

Continuidade e paridade: Dentro de domínio importa procurar se existem pontos de descontinuidade. É útil saber se a função é par ou ímpar pois, em caso afirmativo, simplifica o estudo de muitas características;

Assintotas: Imprescindíveis para a compreensão do comportamento da função, devem ser determinadas e caracterizadas pelas suas equações;

Limites: Há que calcular os limites laterais em pontos de descontinuidade, de mudança de definição da função e em pontos que não pertencem ao domínio mas são seus pontos de acumulação. Estudar os limites da função quando a variável tende para infinito;

Intersecção com eixos e variação de sinal: Determinar, se existem, as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico com os eixos e quais os intervalos de variação de sinal positivo ou negativo da função;

1ª derivada : O sinal e os zeros da 1ª derivada indicam-nos os intervalos de monotonia e as abcissas dos possíveis extremos relativos. A derivada «explica» a variação da função. Não esqueças que pode

Tarefa 27

Esboça o gráfico de uma função f que verifica as seguintes propriedades:

- $Df = \mathbb{R}^+$
- $f(3) = 4$
- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < 3$
- $f'(3) = 0$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 3$

haver máximos ou mínimos em pontos onde não há derivada ou nas fronteiras do domínio.

2ª derivada: O sinal e os zeros da segunda derivada indicam o sentido da concavidade do gráfico e possíveis pontos de inflexão. Estes podem identificar onde o crescimento (decréscimo) foi máximo ou mínimo.

Esboço do gráfico e contradomínio: O estudo analítico deverá permitir esboçar uma representação gráfica da função que considere todas as características obtidas. A representação gráfica permite, por sua vez, a leitura do contradomínio. A imagem geométrica da função é a forma mais sugestiva e eficaz de apresentar globalmente o comportamento de uma função.

Exemplo:

Esboçar o gráfico da função, definida em \mathbb{R} , por $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

Ora, a função a estudar é uma função racional de domínio

$$Df = \{x \in \mathbb{R} : x+2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\} \text{ e contradomínio } CDf = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

A função não é par porque, $f(x) \neq f(-x)$ nem ímpar ($f(x) \neq -f(-x)$)

A função é descontínua para $x = -2$ ($-2 \notin Df$) e a reta de equação $x = -2$

é uma assintota vertical porque, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$,

O eixo Oy é uma assintota horizontal porque,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

A função não intersecta o eixo Ox (não tem zeros), mas intersecta o eixo

Oy no ponto de ordenada $\frac{1}{2}$.

A primeira derivada é também uma função racional, definida por

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} \quad \forall x \neq -2 \text{ e } f'(x) < 0 \quad \forall x \neq -2, \text{ logo } f \text{ é estritamente}$$

decréscente. A função não tem pontos extremos.

$$\text{A segunda derivada é dada por } f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3} \quad \forall x \neq -2 \text{ e}$$

$f''(x) > 0 \quad \forall x \neq -2$, logo o gráfico de f tem concavidade voltada para cima (côncava) e não tem inflexões.

Tarefa 28

Esboça o gráfico de uma função f que verifica as seguintes propriedades:

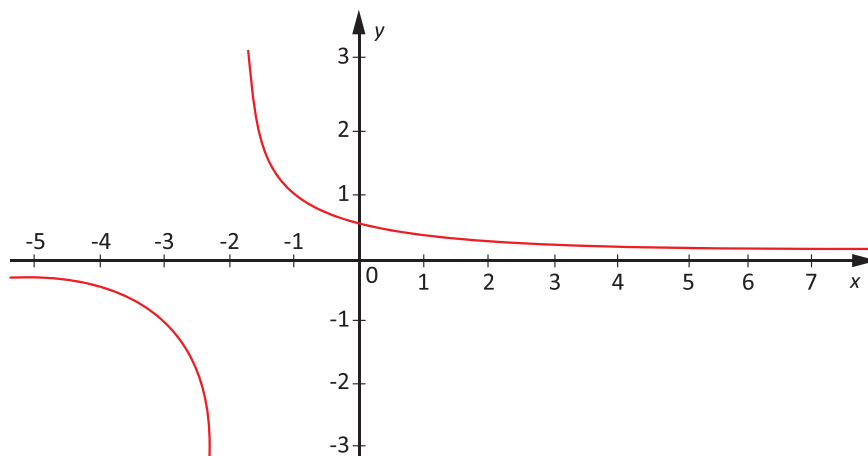
- Os pontos $(2, 3), (4, 5), (6, 7)$ pertencem ao gráfico
- f é contínua
- $f'(6) = 0$ e $f'(2) = 0$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 4$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > 4$
- $f''(4) = 0$

Tarefa 29

Esboça o gráfico das funções reais de variável real definidas por:

- $y = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$
- $y = x^4 - 2x$

O gráfico de $y = f(x)$ é uma hipérbole:



Indeterminações

As derivadas podem ser muito úteis no cálculo de limites de quocientes

$\frac{f(x)}{g(x)}$ que assumem indeterminações, na forma $\left(\frac{0}{0}\right)$ ou $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Nota

A Regra de Cauchy é ainda aplicável na resolução de indeterminações $\left(\frac{0}{0}\right)$ ou $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ quando $x \leftarrow \pm\infty$.

Regra de Cauchy:

Sejam f e g duas funções deriváveis em um intervalo aberto I contido nos respectivos domínios, tais que $g'(x) \neq 0 \forall x \in I$.

Se quando x tende para a ($x \rightarrow a$), $f(x)$ e $g(x)$ tendem para

0 ou para $\pm\infty$ e se existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então também existe

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ e tem-se que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Exemplo:

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

Ao calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ encontramos a indeterminação $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Sejam $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x$ para qualquer $x \neq 0$.

As funções são deriváveis e $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$ e $g'(x) = x' = 1$.

Então $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$.

Estamos em condições de aplicar a regra de Cauchy para concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Exemplo:

Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$.

Ora, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$ é uma indeterminação do tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = e^x$. Então, o limite das respectivas derivadas,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x}$$
 é ainda uma indeterminação do mesmo tipo.

Derivando novamente, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{+\infty} = 0$.

Pela regra de Cauchy concluímos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$.

Exemplo:

Mostra que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Ora, $(e^x - 1)' = e^x$ e $(x)' = 1$, nas condições para aplicação da regra de

Cauchy, temos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1$.

Exemplo:

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$.

Este limite é uma indeterminação $\left(\frac{0}{0}\right)$. Consideramos $f(x) = 3^x - 2^x$ e

$g(x) = x$, em condições de aplicar a regra de Cauchy e obter:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x \ln 3 - 2^x \ln 2}{1} = \ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Tarefa 30

Calcula os seguintes limites

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{1 - x}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(x+1)}{x}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$