

## Exercícios e Problemas

1. Usa a definição para determinar a derivada de cada uma das seguintes funções:

a)  $f(x) = \sqrt{x}$

b)  $g(x) = 1 - 4x^2$

c)  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

2. Calcula as derivadas laterais nos pontos do domínio em que a função não é derivável.

a)  $f(x) = 2|x-3|$

b)  $f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ 2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$

3. Determina a equação da reta tangente e da reta normal às curvas, nos pontos indicados.

a)  $f(x) = x^4 - 1$ , em  $x = 1, x = 0, x = a$  ( $a \in \mathbb{R}$ )

b)  $f(x) = x(3x-5)$ , em  $x = \frac{1}{2}, x = a$  ( $a \in \mathbb{R}$ )

c)  $f(x) = x^3 - 2x + 1$ , no ponto de coordenadas  $(-2, 9)$ .

4. Encontra a expressão da derivada das funções reais de variável real definidas, no seu domínio, por:

a)  $f(r) = \pi r^2$

k)  $f(x) = e^{3x^2+6x+7}$

b)  $f(x) = 14 - \frac{1}{2}x^{-3}$

l)  $f(x) = \frac{a^{3x}}{b^{3x^2-6x}}$

c)  $f(x) = (3x^5 - 1)(2 - x^4)$

m)  $f(x) = \frac{1}{2}(a + bx)\ln(a + bx)$

d)  $f(x) = 7|ax^2 + bx + c|$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ )

n)  $f(x) = \operatorname{sen}^3(3x^2 + 6x)$

e)  $f(t) = \frac{3t^2 + 5t - 1}{t - 1}$

o)  $f(t) = \frac{\sqrt{e^t - 1}}{\sqrt{e^t + 1}}$

f)  $f(x) = (x^3 - 1)(3x - 1)(5x^2 + 2x)$

p)  $f(x) = \frac{1}{a}(bx^2 + c) - \ln x$ , ( $a \neq 0$ )

g)  $f(x) = \frac{2 - x^2}{2 - x}$

q)  $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$

h)  $f(x) = 10x(3x^2 + 7x + 3)$

r)  $f(x) = e^{2x} \cos 3x$

i)  $f(x) = \sqrt[3]{(3x^2 + 6x - 2)^2}$

s)  $f(x) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$

j)  $f(x) = \frac{7x^2}{2(\sqrt[5]{3x+1})} + \sqrt{3x+1}$

t)  $f(x) = \log_2(3x - \cos 2x)$

5. Determina as derivadas sucessivas até a ordem  $n$  indicada.

a)  $y = \frac{1}{x}, n = 6$

b)  $y = 3x^4 - 2x, n = 5$

c)  $y = \text{sen}(2x), n = 4$

6. Uma empresa possui a Receita e o Custo dados pelas expressões:

Receita  $R(x) = x^2 + 11$ ;

Custo  $C(x) = \frac{29}{6}x + 1$ .

Para um intervalo de produção de zero a seis unidades, determina:

- a) A produção para que o *Custo* seja mínimo;
- b) Os intervalos em que a *função Custo* cresce ou decresce;
- c) A produção para que a *Receita* seja máxima;
- d) Os intervalos em que a *Receita* cresce ou decresce;
- e) A produção para que o *Lucro* seja máximo.

7. Um projétil é lançado na vertical de baixo para cima a uma velocidade inicial de 140 m/segundo. A distância, em metros, a que encontra do solo decorrido  $t$  segundos é dada por  $d(t) = 140t - 20t^2$ .

7.1 Decorridos 5 segundos, a que distância do solo se encontra o projétil?

7.2 Escreve a expressão da velocidade (1ª derivada) e da aceleração (2ª derivada) do projétil ao fim de  $t$  segundos.

7.3 Qual a altura máxima atingida pelo projétil? Em que instante isso ocorre?

7.4 Passado quanto tempo o projétil atinge o solo?

8. Uma empresa descobre que  $t$  dias após terminada uma campanha publicitária dum determinado produto, o número de vendas diárias é dado em função de  $t$  por:  $s(t) = 100 + 800e^{-0,2t}$ .

8.1 Determina:

- a) O número de vendas no instante em que terminou a campanha.
- b) O número de dias que se seguiram ao final da campanha e durante os quais o número de vendas foi superior a 500.

8.2 Esboça graficamente  $s(t)$  e explica como foi variando o número de vendas diárias com o decorrer do tempo após ter terminado a campanha publicitária do produto.

8.3 Calcula e estuda o sinal de  $s'(t)$ . Com base nos resultados interpreta a forma como evoluiu o número de vendas e compara com as conclusões tiradas antes.

8.4 Se não for feita mais nenhuma campanha publicitária em que valor tenderá a estabilizar o número de vendas diárias do produto?

9. A equação  $T(t) = 30 + \frac{250t}{t^2 + 10}$  relaciona a Temperatura  $T$  (em graus Celcius) de uma reação química com o tempo da experiência (em minutos). Sabendo que experiência durou 60 minutos:

9.1 Calcula e explica o significado do quociente  $\frac{T(2) - T(0)}{2}$ .

9.2 Qual o significado de  $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{T(t) - T(2)}{t - 2}$  no contexto da experiência?

9.3 Determina em que instante  $t$  se registou a temperatura máxima.

9.4 Existe alguma inflexão na curva da temperatura da experiência? Justifica a tua resposta e determina qual o significado no contexto da situação.

10. Supondo que a equação de procura de um artigo comercial é  $p = 100 - 0,01x$  e custo deste artigo é  $C(x) = 50x + 10000$  dólares.

10.1 Determina o número de unidades que maximiza o lucro e qual o lucro total para esse valor de produção.

10.2 Supondo que é cobrada uma taxa de valor igual a 10 dólares por unidade, qual será então o número de unidades correspondente ao lucro máximo.

11.

11.1 O custo  $C$  para se beneficiar um produto alimentar à base de trigo é dado por:  $C = x^2 + 4000$ , onde  $C$  é dado em dólares e  $x$  é a quantidade de trigo (em toneladas).

a) Determina a taxa de variação média do custo para o intervalo  $1 \leq x \leq 5$ . Qual é o significado geométrico desse resultado obtido?

b) Calcula a derivada do custo no ponto correspondente a  $x = 2$ . O que significa este resultado no contexto da situação?

11.2 Para o mesmo produto, a receita  $R$ , em dólares, ao se comercializar a quantidade  $y$ , em unidades, é dada pela função:  $R = -2y^2 + 1000y$ .

a) Esboça o gráfico de  $R$ , assinalando os seus principais pontos de referência.

b) Calcula a derivada  $R'(100)$ . Qual a unidade dessa derivada? O que representa no contexto da situação?

c) Quantas unidades devem ser comercializadas para que a receita seja máxima? Qual é o valor desta receita máxima?

d) Calcula  $R'(200)$  e  $R'(300)$ . O que significa o sinal do resultado obtido, no contexto da situação?