

12. Esboça o gráfico e faz um estudo das funções, indicando o domínio, pontos críticos, extremos, intervalos de crescimento e decréscimo, concavidades e inflexões do gráfico das funções definidas em  $\mathbb{R}$  por:

a)  $f(x) = 4 - x^2$

b)  $f(x) = x^3 + 1$

c)  $f(x) = 2e^{-x}$

d)  $f(x) = \ln(2x + 3)$

e)  $f(x) = \frac{x^3}{3} - 9x + 2$

f)  $f(x) = 3 - (x + 1)^3$



### Conteúdos

*Função primitiva*

*Primitivas. Métodos de primitivação*

*Teorema fundamental do cálculo*

*Regra de Barrow*

*Noção de soma integral*

*Integral definida. Propriedades*

*Aplicações do cálculo integral:*

*a) Áreas de figuras planas*

*b) Volumes de sólidos de revolução*

### Subtema 2 - Cálculo de áreas e volumes

Primitivas e integrais são noções fundamentais para o cálculo e a análise matemática.

Conhecida a derivada de uma função pode ser importante saber qual a função que lhe corresponde. A primitivação é o processo inverso da derivação.

Por sua vez, a integral definida surge relacionada com o problema de determinar a área de certas figuras irregulares planas e o volume de sólidos de revolução, mas também possui muitas outras interpretações possíveis. Permite por exemplo, determinar a posição futura de um corpo a partir da sua posição atual e do conhecimento das forças que atuam sobre ele.

### Função primitiva

Determinar uma primitiva de uma função envolve o processo inverso da derivação.

### Nota

Para primitivar uma função  $f$  deves pensar qual a função cuja derivada é  $f(x)$ ?...



Uma **primitiva** para uma função real de variável real  $f$  é uma outra função real de variável real derivável  $F$ , cuja derivada coincide com  $f$ , isto é,  $F'(x) = f(x)$ .

**Exemplo:** Para a função definida por  $f(x) = x^2$ , são suas primitivas as funções definidas por:

$$F(x) = \frac{x^3}{3}, \text{ pois } F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \times 3x^2 = x^2$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 2, \text{ pois } F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 2\right)' = \frac{1}{3} \times 3x^2 + 0 = x^2$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + c \ (c \in \mathbb{R}), \text{ pois } F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + c\right)' = x^2$$

A constante  $c$  da última primitiva é tão geral, que se  $F(x)$  e  $G(x)$  são duas quaisquer primitivas de uma função  $f$  então, para todo  $x \in Df$ ,  $c = F(x) - G(x)$ . Ou seja, todas as primitivas de uma função diferem por uma constante.

### Exemplo:

Todas as primitivas para a função  $f(x) = x^2$  são da forma:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Se  $F(x)$  é uma primitiva para  $f(x)$  então  $P[f(x)] = F(x) + c$  é a expressão geral de todas as primitivas para a função  $f$ , qualquer que seja  $c \in \mathbb{R}$ .

### Exemplo:

A primitiva de uma função é uma *inversa* da função derivada.

Se a derivada  $(x^3)' = 3x^2$ , então sabemos que  $3x^2$  é uma primitiva de  $x^3$ .

Indicando por  $P$  a operação inversa da derivação (primitivação), temos que  $P(3x^2) = x^3 + c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ).

## Métodos de primitivação

Uma função  $f$  diz-se primitivável se admite uma primitiva. Para obter uma primitiva para uma função há técnicas de primitivação que podem ser desenvolvidas. Vejamos algumas destas técnicas:

### Primitivação imediata

O método de primitivação imediata consiste em verificar se a expressão a primitivar define a derivada de alguma função conhecida.

### Exemplo:

- $(x)' = 1 \Rightarrow P(1) = x + c, c \in \mathbb{R};$
- $(x^2)' = 2x \Rightarrow P(x) = \frac{1}{2}x^2 + c, c \in \mathbb{R};$
- $(x^3)' = 3x^2 \Rightarrow P(x^2) = \frac{1}{3}x^3 + c, c \in \mathbb{R};$
- $(x^5)' = 5x^4 \Rightarrow P(x^4) = \frac{1}{5}x^5 + c, c \in \mathbb{R};$

Estes exemplos levam-nos a estabelecer a seguinte regra de cálculo para a primitiva de uma função potência:

#### Recorda

A regra de derivação de uma potência:  $(u^n)' = n \times u^{n-1} \times u'$ .

**Recorda**

A derivada da raiz quadrada:

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (u > 0).$$

**Recorda**

A derivada do logaritmo

natural:  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}, u > 0.$

**Tarefa 31**

Calcula as seguintes primitivas:

a)  $P(\cos(4x))$

b)  $P(-3x^{-4})$

c)  $P(6x)$

d)  $P(x^7)$

e)  $P(\frac{1}{2x^3})$

f)  $P(-\frac{2}{x^3})$

g)  $P(\sqrt[3]{x})$

h)  $P(-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}})$

**Recorda**

A regra da derivada de uma soma de funções:

$$[f_1 + f_2 + \dots + f_n]' = f_1' + f_2' + \dots + f_n'$$

Se  $n \neq -1$ ,  $P(nx^{n-1}) = x^n + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Ou seja,

$$P(x^n) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, c \in \mathbb{R}$$

Se  $n = -1$ , como  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$  então  $P(x^{-1}) = P(\frac{1}{x}) = \ln|x| + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

Nota que esta regra é aplicável a todo tipo de potências de expoente natural, inteiro ou racional.

**Exemplo:**

$$P(x^{-7}) = \frac{x^{-7+1}}{-7+1} + c = -\frac{x^{-6}}{6} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$P(\frac{1}{\sqrt{x}}) = P(x^{-\frac{1}{2}}) = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = 2\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$P(\frac{1}{x-2}) = \ln|x-2| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$P(\frac{1}{2x+1}) = \frac{1}{2}P(\frac{1}{x+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ln|x+\frac{1}{2}| + c, c \in \mathbb{R}$$

Se  $k$  é uma constante real não nula e  $f$  uma função que admite primitiva, então:

$$P(k) = kx + c, c \in \mathbb{R}$$

$$P[k \cdot f(x)] = k \cdot P[f(x)].$$

**Primitivação por decomposição**

A primitiva de uma soma de funções é igual à soma das primitivas das funções. Ou seja,

$$P[(f_1 + f_2 + \dots + f_n)(x)] = P[f_1(x)] + P[f_2(x)] + \dots + P[f_n(x)]$$

**Exemplo:**

$$P(6x-1) = 6P(x) - P(1) = 6 \times \frac{1}{2}x^2 - x + c, c \in \mathbb{R}$$

**Exemplo:**

$$P(3x^2 - 5x + 4) = P(3x^2) - P(5x) + P(4) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x + c, c \in \mathbb{R}$$

### Exemplo:

$$P(\operatorname{sen} x + \cos x) = P(\operatorname{sen} x) + P(\cos x) = -\cos x + \operatorname{sen} x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

### Exemplo:

$$\text{Se } [(6x+1)^3]' = 3(6x+1)^2 \cdot (6x+1)' = 3 \times 6 \times (6x+1)^2, \text{ então}$$

$$P[18 \times (6x+1)^2] = (6x+1)^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Se } [(x^3 + x^2)^4]' = 4 \times (x^3 + x^2)^3 \cdot (3x^2 + 2x), \text{ então}$$

$$P[4 \times (x^3 + x^2)(3x^2 + 2x)] = (x^3 + x^2)^4 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Nas situações gerais, a regra da derivada da composta permite-nos generalizar algumas das mais usuais **regras práticas de primitivação**.

Seja  $u = f(x)$ . Então:

$$P(u^n \cdot u') = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (n \neq -1)$$

$$P(u^{-1} \cdot u') = P\left(\frac{u'}{u}\right) = \ln |u| + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (n = -1)$$

$$P(e^u \cdot u') = e^u + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$P(\operatorname{sen}(u) \cdot u') = -\cos(u) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$P(\cos(u) \cdot u') = \operatorname{sen}(u) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$P\left(\frac{u'}{\cos^2(u)}\right) = \tan(u) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$P\left(\frac{u'}{\operatorname{sen}^2(u)}\right) = -\cot(u) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$a > 0 \wedge a \neq 1, \quad P(a^u \cdot u') = \frac{a^u}{\ln a} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

### Tarefa 32

Calcula as seguintes primitivas:

- a)  $P(x^7 - 6x + 8)$
- b)  $P(x^{-4} + 2x + 3)$
- c)  $P(3\operatorname{sen} x)$
- d)  $P(x + 5)$
- e)  $P(x^3 - 6x^2 + 4x)$
- f)  $P(-\frac{1}{2}x^4 + x^3 + \sqrt{2})$

### Exemplos:

- $P(\operatorname{sen} 2x) = P\left(\frac{1}{2} 2 \operatorname{sen} 2x\right) = \frac{1}{2} P(2 \operatorname{sen} 2x) = -\frac{\cos 2x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$
- $P(e^{-3x}) = P\left[\frac{1}{-3} (-3e^{-3x})\right] = -\frac{1}{3} P(-3e^{-3x}) = e^{-3x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$
- $P(2^x) = \left(\frac{1}{\ln 2}\right) \cdot 2^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

### Recorda

As regras de derivação:

$$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen}(u)$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$$

**Tarefa 33**

Calcula as seguintes primitivas:

a)  $P[sen(\pi x) - \pi]$

b)  $P(2te^{t^2+1})$

c)  $P(\frac{x^3 + x - 2\sqrt{x} - 3}{x^2})$

d)  $P(x^3 - \frac{1}{x^3})$

e)  $P(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})$

f)  $P(\sqrt[3]{x} + \frac{2x}{x^2 - 1})$

g)  $P(e^{2x} - \sqrt{2x-5})$

h)  $P[sen(2x+1) + cos(3x+2)]$

- $P[\cos(\frac{x}{2})] = P[\cos(\frac{1}{2}x)] = \frac{sen(\frac{1}{2}x)}{\frac{1}{2}} + c = 2sen\frac{x}{2} + c, c \in IR$
- $P[(3x+4)^2] = P[(3x+4)^2 \times \frac{1}{3}(3x+4)'] = \frac{1}{9}(3x+4)^3 + c, c \in IR$
- $P[(2x-1)^2] = P[(2x-1)^2 \times \frac{1}{2}(2x-1)'] =$   
 $= P[\frac{1}{4} \times 2 \times (2x-1)' \times (2x-1)^2] = \frac{1}{4} \times \frac{(2x-1)^3}{3} + c, c \in IR$
- $P[\frac{1}{2\sqrt{5x+1}}] = P[\frac{(5x+1)'}{2\sqrt{(5x+1)}}] = \frac{1}{5}\sqrt{5x+1} + c, c \in IR$
- $P[\frac{1}{\sqrt{3x}}] = P[\frac{2 \times 3}{3 \times 2\sqrt{3x}}] = \frac{2}{3}\sqrt{3x} + c, c \in IR$
- $P[sen(3x+1)] = P[\frac{-3}{-3} \times sen(3x+1)] = -\frac{1}{3}cos(3x+1) + c, c \in IR$
- $P[x^3 \cos(x^4+1)] = P[\frac{4x^3 \cos(x^3+1)}{4}] = \frac{1}{4}sen(x^3+1) + c, c \in IR$
- $P[\frac{e^x}{3+2e^x}] = \frac{1}{2}P[\frac{2 \times e^x}{3+2e^x}] = \frac{1}{2} \ln |3+2e^x| + c, c \in IR$
- $P[\frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}] = \frac{2}{3}P[\frac{3(2+\ln x)^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot \frac{1}{x}] = \frac{2}{3}(2+\ln x)^{\frac{3}{2}} + c, c \in IR$

**Primitivação por mudança de variável**

Por vezes, há necessidade de proceder a pequenas transformações algébricas de modo a identificar mais facilmente a derivada de alguma função. Esta técnica consiste em substituir a variável na função a primitivar, transformando-a em outra mais facilmente primitivável.

**Exemplos:**

a)  $P(e^{5x})$

Fazendo  $u = 5x \Rightarrow u' = 5$  e primitivando em ordem a esta variável,

temos:  $P(\frac{1}{5}e^u) = \frac{1}{5}e^u + c, c \in IR$

Voltando à variável original,

$P(e^{5x}) = \frac{1}{5}e^{5x} + c, c \in IR$

b)  $P[(x^2 + 3x)^2(2x + 3)]$

Fazendo  $u = x^2 + 3x$  e  $u' = 2x + 3$ , temos que,

$$P(u^2) = \frac{u^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$P = \frac{(x^2 + 3x)^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

c)  $P\left(\frac{5x}{x^2 + 1}\right)$

Fazendo  $u = (x^2 + 1)$  e  $u' = 2x$ , temos que,

$$P\left(\frac{du}{u}\right) = \ln|u| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$P\left(\frac{5x}{x^2 + 1}\right) = \frac{5}{2} P_x\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right) = \ln(x^2 + 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

d)  $P(\cos(5x))$

Fazendo  $u = 5x \Rightarrow u' = 5$ , temos:

$$\frac{1}{5} P(\cos u) = \operatorname{sen} u + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$P_x(\cos(5x)) = \frac{1}{5} \operatorname{sen}(5x), \quad c \in \mathbb{R}$$

e)  $P\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

Fazendo  $u = 1 - x^2 \Rightarrow u' = -2x$ , temos:

$$P\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = P\left(x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$P\left(-\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}\right) = -P\left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right) = -\sqrt{u} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$P\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\sqrt{1-x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

f)  $P\left(\frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}\right)$

Fazendo  $u = 2 + \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$

$$P\left(\frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}\right) = \frac{2}{3} P\left(\frac{3(2+\ln x)^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot \frac{1}{x}\right)$$

#### Tarefa 34

Usa a técnica de primitivação por mudança da variável para calcular:

a)  $P(2x\sqrt{1+x^2})$

b)  $P(\sqrt{1+x})$

c)  $P(\operatorname{sen}^2 x \cos x)$

d)  $P(\sqrt{x+3})^4$

e)  $P(e^{5x})$

f)  $P(xe^{x^2})$

g)  $P[x \cos(3x^2)]$

$$\frac{2}{3}P(u^{\frac{1}{2}}) = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$P\left(\frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}\right) = \frac{2}{3}(2+\ln x)^{\frac{3}{2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

g)  $P(x^3 e^{x^4} + 2)$

Fazendo  $u = e^{x^4} \Rightarrow u' = 4x^3 e^{x^4}$

$$P(x^3 e^{x^4} + 2) = P(x^3 e^{x^4}) + P(2) = \frac{1}{4}e^{x^4} + 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

h)  $P\left(\frac{x}{\sqrt{1+x}}\right)$

Fazendo  $u = \sqrt{1+x} \Leftrightarrow u^2 - 1 = x \Rightarrow 2uu' = 1$

$$2P\left(\frac{u^2 - 1}{u} \cdot u\right) = 2P(u^2) - P(1) = \dots = \frac{2}{3}(\sqrt{1+x})^3 - \sqrt{1+x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

### Primitivação por partes

#### Recorda

A regra da derivada de um produto de funções:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Primitivando a regra da derivada do produto de duas funções, temos:

$$P(f \cdot g)'(x) = P[f'(x) \cdot g(x)] + P[f(x) \cdot g'(x)]$$

Ou seja,  $(f \cdot g)(x) = P[f'(x) \cdot g(x)] + P[f(x) \cdot g'(x)]$ , que é equivalente a:

$$P[f'(x) \cdot g(x)] = (f \cdot g)(x) - P[f(x) \cdot g'(x)].$$

Esta igualdade é útil quando se verifica que é mais fácil obter uma primitiva imediata para o produto  $(f \cdot g')(x)$  do que para o produto  $(f' \cdot g)(x)$ .

#### Regra prática

Para aplicar esta técnica, escolhe-se uma das funções para primitivar (por exemplo,  $f'(x)$ ) e deriva-se a outra (função  $g(x)$ ) e usa-se a regra  $P(f' \cdot g) = f \cdot g - P(f \cdot g')$ .

#### Exemplo:

Para calcular  $P(x \ln x)$ , tomamos  $f(x) = x$  e  $g(x) = \ln x$ . Assim, uma primitiva para  $P(x)$  é a função  $F(x) = \frac{x^2}{2}$  e a derivada  $g'(x) = \frac{1}{x}$ .