



Conteúdos

Cónicas

Elipse

Definição geométrica

Definição paramétrica

Traçado da elipse

Hipérbole

Definição geométrica

Traçado da hipérbole

Parábola

Definição geométrica

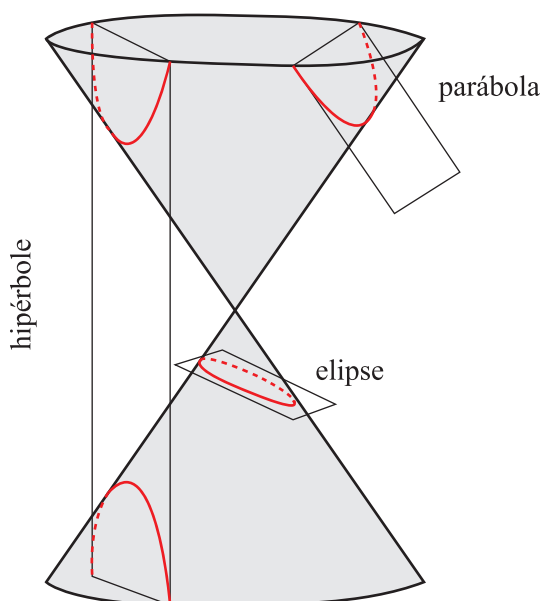
Traçado da hipérbole

Elipse, Parábola, Hipérbole

Chamam-se cónicas às secções planas de qualquer superfície cónica de revolução.

A interseção de uma superfície cónica de revolução com um plano que não passa pelo vértice pode ser:

- uma elipse - quando o plano secante intersesta todas as geratrizes (a circunferência é um caso particular da elipse);
- uma hipérbole - quando o plano secante é paralelo a duas geratrizes distintas;
- uma parábola - quando o plano secante é paralelo a uma só geratriz.



A elipse

Chama-se elipse ao conjunto dos pontos do plano tais que a soma das distâncias de cada um deles a dois pontos fixos do plano, denominados focos da elipse, é igual a um comprimento constante, maior que a distância entre os focos.

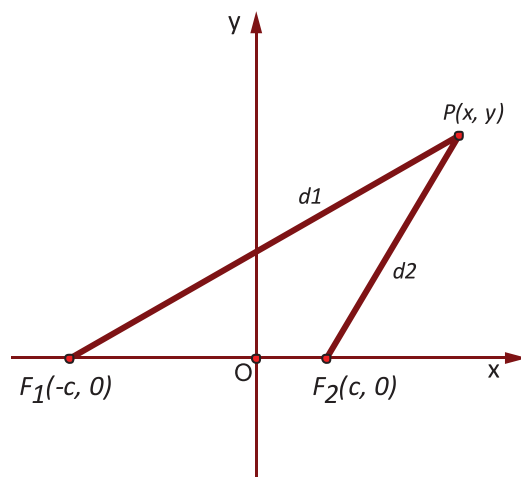
Vamos supor que os focos se situam sobre um dos eixos coordenados, em posição simétrica em relação a origem do referencial.

Se for $2a$ a soma das distâncias de um ponto qualquer $P(x, y)$ aos focos F_1 e F_2 e se estes estiverem situados no eixo das abcissas, podemos escrever $d_1 + d_2 = 2a$

Com $d_1 = \overline{PF_1}, d_2 = \overline{PF_2}$

$F_1(-c, 0); F_2(c, 0)$

$2a > 2c$ e $c > 0$.



Recorda

Dados dois pontos P e Q a fórmula da distância entre eles é dada pela seguinte fórmula

$P(x_0, y_0), Q(x_1, y_1)$

$d(P, Q) =$

$$= \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos podemos escrever a expressão $d_1 + d_2 = 2a$

Na forma

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a^2\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a^2\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

$$a^2(\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = (a^2 - cx)^2$$

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2ca^2x + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Seja

$$a^2 - c^2 = b^2 \text{ (sendo } a \text{ superior a } c \text{ a } a^2 - c^2 \text{ e positiva)}$$

Temos

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo ambos os membros da expressão anterior por a^2b^2

Temos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Equação reduzida da elipse.}$$

Nota

Princípio aplicado em equações irracionais

$$A = B \Rightarrow A^2 = B^2$$

Tarefa 1

Determina os eixos e os focos das elipses

a) $9x^2 + 16y^2 = 144$

b) $4x^2 + y^2 = 1$

Tarefa 2

Determina os vértices das elipses

a) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

b) $4x^2 + y^2 = 16$

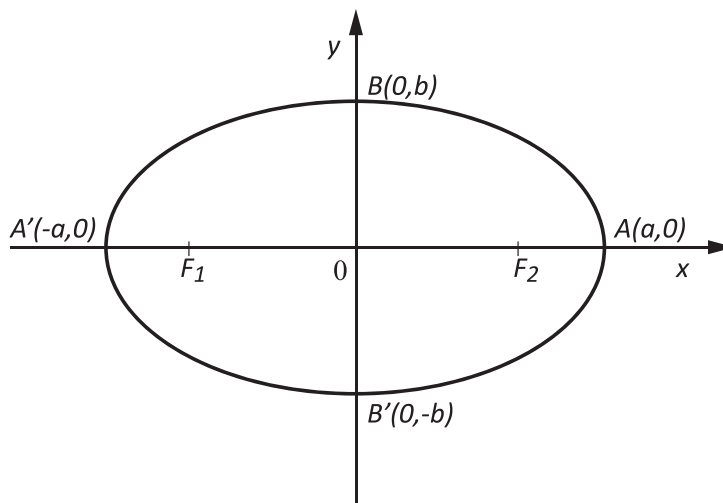
Nota

Atenção que a e b são positivos

Esboço da elipse

A elipse definida pela equação, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, interseja os eixos coordenados nos pontos

$A(a, 0)$ e $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$ e $B'(0, -b)$. (observe a figura seguinte)



Resolvendo a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ em ordem a y temos,

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{a^2}(a^2 - x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \vee y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Esta expressão mostra que a elipse é a reunião dos gráficos das funções contínuas e pares.

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ e } y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Estas funções têm domínio $[-a, a]$

Domínio:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : a^2 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq a^2\} = \{x \in \mathbb{R} : -a \leq x \leq a\} = [-a, a]$$

As funções são contínuas no seu domínio

Estudo da monotonia:



Cálculo da função derivada

$$y' = \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right)' = \frac{b}{a} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Cálculo do zero da função derivada:

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Estudo do sinal da função derivada:

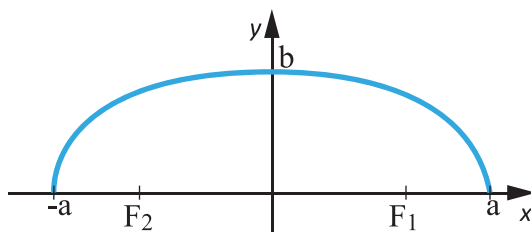
	$-a$	0	a
Y'	$+$	0	$-$
y			

A função $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ é crescente em $[-a, 0]$;

A função $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ é decrescente em $[0, a]$

A função $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ($y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$) tem um máximo, ponto B (um mínimo, ponto B')

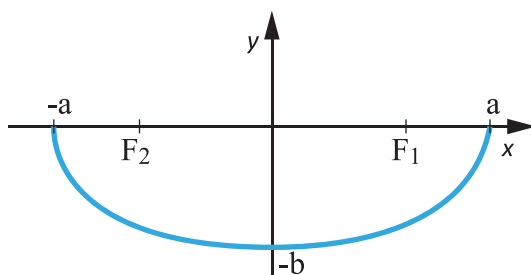
Esboço da representação gráfica da função definida por, $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$



Atendendo a que a expressão $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ é simétrica da expressão

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

O gráfico da função real de varável real, definida por, $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ é:



Tarefa 3

Considera a elipse de equação:

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Indica:

- Os comprimentos dos eixos;
- As coordenadas dos vértices e dos focos;
- Faz a representação gráfica.

Tarefa 4

Dada a elipse de equação:

$$\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$$

- Indica as coordenadas dos focos;

Considera os pontos

$$A(1,1)$$

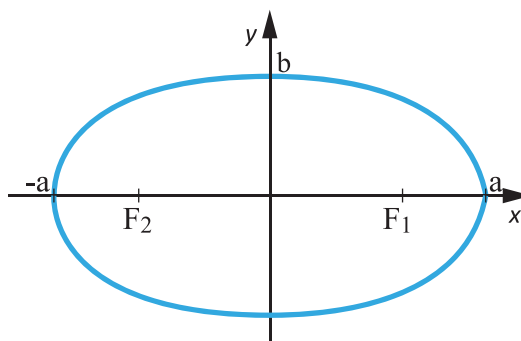
$$B(4,0)$$

Mostra que são verdadeiras as proposições:

$$\overline{AF_1} + \overline{AF_2} < 8$$

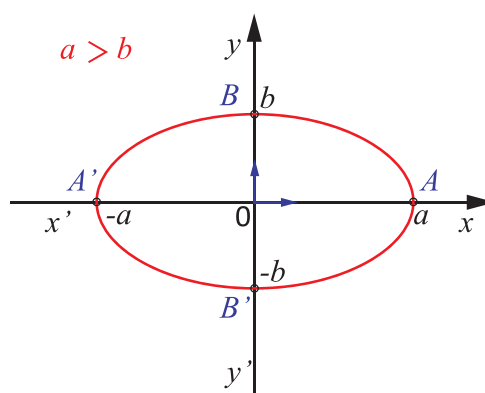
$$\overline{BF_1} + \overline{BF_2} > 8$$

O gráfico da elipse definida pela equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é a reunião dos gráficos destas funções, ou seja:



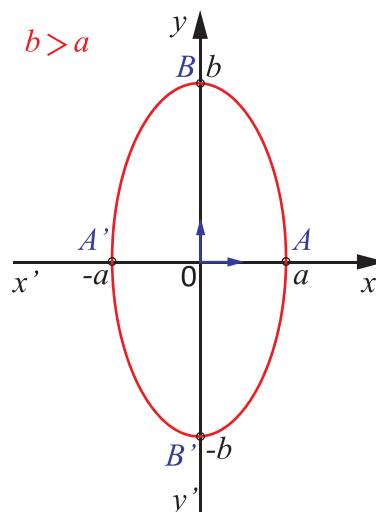
Toda a elipse é uma linha fechada com dois eixos de simetria perpendiculares entre si e com um centro de simetria que é o ponto de intersecção destes eixos.

Os pontos A , A' , B e B' em que a elipse é intersectada pelos eixos de simetria, chamam-se vértices da elipse.



Se $a > b$, ao segmento $[AA']$, onde se situam os focos, de medida de comprimento $2a$, chama-se **eixo maior da elipse**; o segmento $[BB']$ de comprimento $2b$, chama-se **eixo menor da elipse**. Neste caso o eixo maior está sobre o eixo dos xx' .

Se $b > a$, temos uma elipse de eixo maior $2b$, sobre o eixo dos yy' .



Tarefa 5

Uma elipse tem os focos

$$F_1(0, 2)$$

$$F_2(0, -2)$$

e a soma das distâncias de cada ponto da elipse aos focos é 8.

- Escreve uma equação reduzida da elipse;
- Faz a representação gráfica;
- Verifica, analiticamente, que a soma das distâncias dos pontos da elipse que estão sobre o eixo dos y aos focos é igual a 8.

À medida do comprimento entre os focos chama-se distância focal,

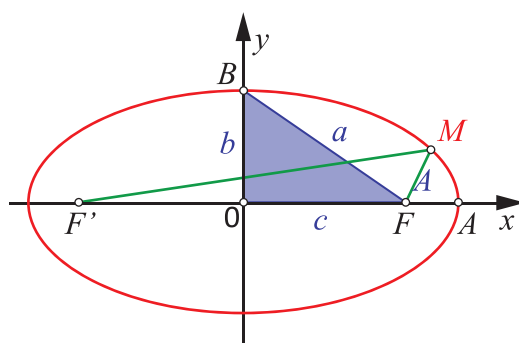
$$\overline{F_1F_2} = (2c).$$

Assim, para $a > b$, temos,

a - semieixo maior; b - semieixo menor; c - semidistância focal

A relação existente entre a , b e c

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Mostra que a , b e c são as medidas dos lados de um triângulo retângulo, $[OBF]$.

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Os pontos do eixo do x de coordenadas,

$$F(c, 0) \text{ e } F'(-c, 0)$$

São os focos da elipse.

À razão $\frac{c}{a} = \frac{\text{semidistância focal}}{\text{semieixo maior}}$, chama-se **excentricidade da elipse** e designa-se por **e** .

Exemplos:

Determinar os vértices, os focos e a excentricidade de cada uma das elipses

$$1. \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 ; 2. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1 ; 3. 4x^2 + 9y^2 = 25$$

Resolução:

1. Vértices: $(5, 0)$, $(-5, 0)$, $(0, 3)$ e $(0, -3)$

Focos: Como $25 > 9$ os focos estão sobre o eixo dos x .

Sendo $c^2 = 25 - 9$; $c = 4$ os focos são $(4, 0)$ e $(-4, 0)$

$$\text{Excentricidade: } e = \frac{4}{5}$$

Tarefa 6

Escreve a equação da elipse:

a) Que tem os seguintes vértices:

$$(0, \pm 3) \text{ e } (0, 3); (0, -3)$$

$$(\pm 1, 0) \text{ e } (1, 0); (-1, 0)$$

b) Centrada na origem do referencial, de eixo maior sobre o eixo das abcissas, com medida de comprimento 12 e que passa pelo ponto

$$\left(1, \frac{2}{3}\sqrt{35}\right)$$

c) Centrada na origem do referencial, com

excentricidade igual a $\frac{5}{13}$ e um dos focos, o ponto de coordenadas $(0, 5)$

Tarefa 7

Dada a elipse de equação,

$$\frac{(x+1)^2}{49} + \frac{(y+2)^2}{32} = 1$$

Indica:

- As medidas dos comprimentos dos eixos (do eixo maior e do eixo menor);
 - As coordenadas dos focos;
 - As coordenadas dos vértices;
 - As equações das diretrizes.
- Representa graficamente a elipse.

Tarefa 8

Escreva a equação da elipse de centro $(1, 0)$, que passa pelo ponto $(6, 0)$ (um dos vértices do eixo maior), e com excentricidade igual a $\frac{4}{5}$.

2. Vértices: $(4, 0)$, $(-4, 0)$, $(0, 5)$ e $(0, -5)$

Focos: Como $25 > 16$ os focos estão sobre o eixo dos y .

Sendo $c^2 = 25 - 16$; $c = 3$ os focos são $(0, 3)$ e $(0, -3)$

Excentricidade: $e = \frac{3}{5}$

3. A elipse não está definida da forma habitual, mas é fácil transformá-la

na forma de equação reduzida, ou seja, na forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$4x^2 + 9y^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{25} + \frac{9y^2}{25} = \frac{25}{25} \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{25}{4}} + \frac{y^2}{\frac{25}{9}} = 1$$

Vértices: $(\frac{5}{2}, 0)$; $(-\frac{5}{2}, 0)$, $(0, -\frac{5}{3})$ e $(0, \frac{5}{3})$

Focos: sendo $c = \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{25}{9}} = \frac{5}{6}\sqrt{5}$ os focos são

$(\frac{5}{6}\sqrt{5}, 0)$ e $(-\frac{5}{6}\sqrt{5}, 0)$

A excentricidade é

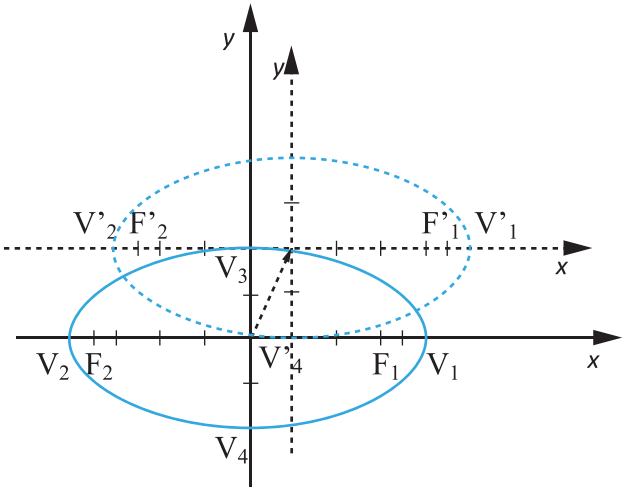
$$e = \frac{\frac{5}{6}\sqrt{5}}{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

A transformada da elipse, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ na translação associada ao vetor $\vec{u}(1, 2)$

é $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$

	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$	$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$
Centro	C (0, 0)	C' (1, 2)
Eixos de simetria	x=0, y=0	x= 1, y= 2
Focos	$F_1(2\sqrt{3}, 0)$ $F_2(-2\sqrt{3}, 0)$	$F_1' = F_1 + \vec{u} = (2\sqrt{3} + 1, 2)$ $F_2' = F_2 + \vec{u} = (-2\sqrt{3} + 1, 2)$
Vértices	$V_1 = (4, 0)$ $V_2 = (-4, 0)$ $V_3 = (0, 2)$ $V_4 = (0, -2)$	$V_1' = V_1 + \vec{u} = (5, 2)$ $V_2' = V_2 + \vec{u} = (-3, 2)$ $V_3' = V_3 + \vec{u} = (1, 4)$ $V_4' = V_4 + \vec{u} = (1, 0)$

A representação geométrica é a seguinte:

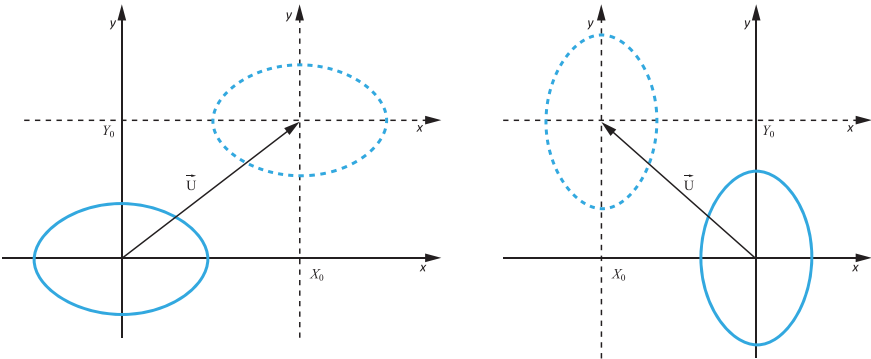


Nota

A representação gráfica facilita a resolução, permitindo a identificação dos valores necessário para escrever uma equação da elipse.

Equações reduzidas da elipse com eixos de simetria paralelos aos eixos coordenados

Considerando a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, a translação dela associada ao vetor $\vec{u} = (x_0, y_0)$ podemos ter, por exemplo:



Equações reduzidas:

	a > b	a < b
	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$
Centro	$C(x_0, y_0)$	$C(x_0, y_0)$
Eixos de simetria	$x = x_0, y = y_0$	$x = x_0, y = y_0$
Vértices	$V_1 = (a + x_0, y_0)$ $V_2 = (-a + x_0, y_0)$ $V_3 = (x_0, b + y_0)$ $V_4 = (x_0, -b + y_0)$	$V_1 = (x_0, b + y_0)$ $V_2 = (x_0, -b + y_0)$ $V_3 = (a + x_0, y_0)$ $V_4 = (-a + x_0, y_0)$

Tarefa 9

Considera a cónica de equação

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Indica a equação reduzida da cónica obtida a partir da anterior através de uma translação associada ao vetor $(1, -2)$.

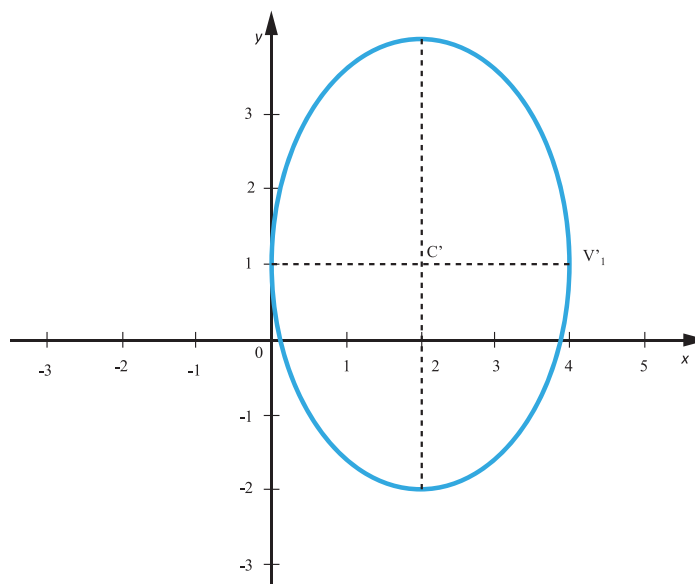
Faz a representação gráfica.

Exemplos:

1. Escreve uma equação da elipse, sabendo que um eixo tem de medida de comprimento 6 e os pontos $(4, 1)$ e $(2, 1)$ são respetivamente, um vértice e o centro.

Resolução:

Através da representação gráfica:



Temos que

$$V'_1 = (4, 1)$$

$$C' = (2, 1)$$

$$\overline{C'V'_1} = 2$$

O eixo da elipse paralelo ao eixo das abcissas mede 4, $2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$

A medida do comprimento do outro eixo da elipse é, $2b = 6 \Leftrightarrow b = 3$

Então a equação da elipse é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

As equações paramétricas da elipse

A equação reduzida da elipse, de centro na origem, pode ser representada na forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

sendo **a** a medida de comprimento do semieixo maior da elipse e, **b** a medida de comprimento do semieixo menor ($a \neq 0$, $b \neq 0$). De acordo com as regras das potências a equação anterior pode escrever-se na forma:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Para a equação anterior ter significado os valores dos termos $\frac{x}{a}$ e $\frac{y}{b}$, devem pertencer ao intervalo $[-1, 1]$.

Outra identidade matemática que representa o mesmo conjunto de valores contínuos é a identidade:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Fazendo a substituição temos que:

$$\frac{x}{a} = \cos t$$

e

$$\frac{y}{b} = \sin t$$

resolvendo as equações anteriores em ordem a x e a y , temos:

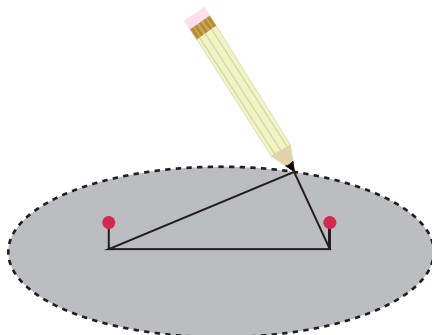
$$x = a \cos t \wedge y = b \sin t$$

onde t representa um ângulo do intervalo $[0, 2\pi]$ ou $[0^\circ, 360^\circ]$.

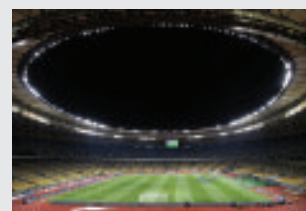
Estas equações são as **representações paramétricas da elipse** (1).

Traçado da elipse

Vimos anteriormente que a elipse é o conjunto dos pontos do plano tais que a soma das distâncias de cada um deles a dois pontos fixos do plano - denominados focos da elipse - é igual a um comprimento constante, maior que a distância entre os focos.



Na arquitetura a forma elíptica está muitas vezes presente.



Arquitetura de uma cobertura num estádio de futebol

Esta definição puramente geométrica deu ao jardineiro um meio simples para traçar canteiros de jardim com a forma de uma elipse.