

Tarefa 10

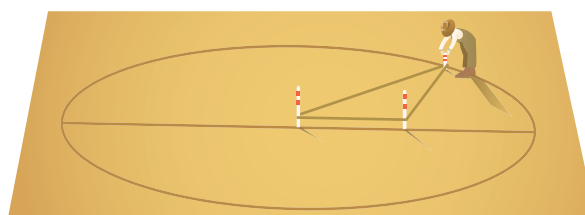
Um jardineiro pretende fazer um canteiro em forma de elipse num terreno retangular que mede 6 por 4.

Onde deve colocar as estacas de forma a desenhar a fronteira do canteiro? Faz a descrição o mais completa possível.

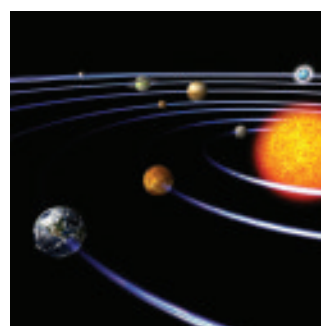
Construção de um canteiro com forma elíptica

Procedimento:

Fixam-se dois paus no chão de modo a que a distância entre eles seja menor do que metade do comprimento de um fio. Com outro pau, e mantendo o fio esticado, desenha-se uma linha no chão, e a linha obtida é a uma elipse.



O movimento dos planetas é descrito por uma elipse em que o Sol é um dos focos (Uma das leis de Kepler (Johannes Kepler, 1571 – 1630, foi um matemático e astrónomo alemão).



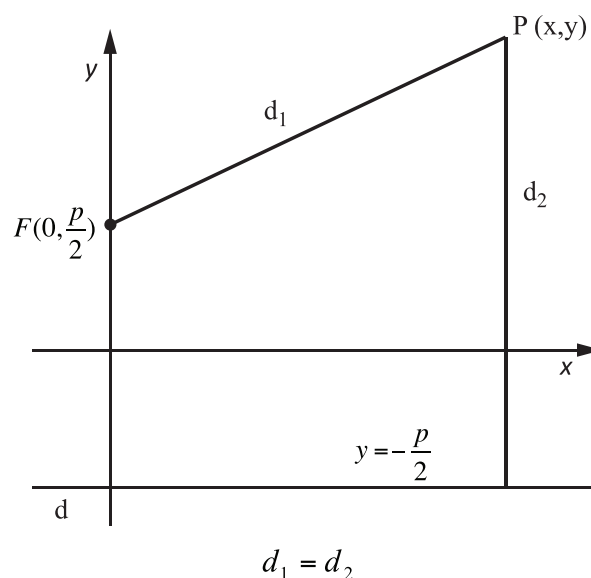
A parábola

Chama-se ao conjunto dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo F , designado por foco, e de uma reta d , designada por diretriz, que não passa pelo foco.

Recorda

Dados dois pontos P e Q a fórmula da distância entre eles é dada pela seguinte fórmula

$$\begin{aligned} P(x_0, y_0), Q(x_1, y_1) \\ d(P, Q) = \\ = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} \end{aligned}$$



Para determinarmos a equação cartesiana da parábola, fixemos o foco, F , sobre o eixo dos y . A diretriz será uma reta paralela ao eixo dos x , de forma a que o eixo dos x seja a mediatriz do segmento de reta que une F ao ponto D , ponto de intersecção da directriz com o eixo dos y .

Se $\overline{FD} = p$ os pontos F e D tem de coordenadas,

$$F(0, \frac{p}{2}) \text{ e } D(0, -\frac{p}{2})$$

A equação da directriz é dada por, $y = -\frac{p}{2}$

Por definição,

P pertence à parábola se e só se $d_1 = d_2$

Ou seja

$$\sqrt{x^2 + (y - \frac{p}{2})^2} = \left| y - (-\frac{p}{2}) \right|$$

Elevando ao quadrado temos,

$$x^2 + (y - \frac{p}{2})^2 = (y + \frac{p}{2})^2$$

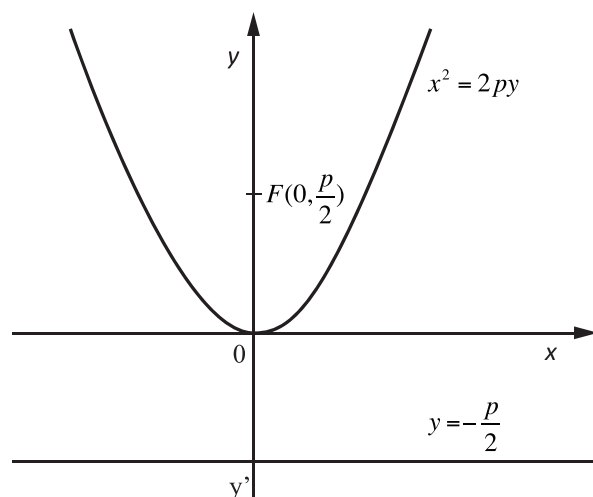
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2py$$

A equação reduzida da parábola é:

$$x^2 = 2py$$

Toda a parábola é uma linha continua aberta com um eixo de simetria.



O ponto em que o eixo de simetria interseja a parábola chama-se vértice da parábola.

Tarefa 11

Justifica que o ponto da parábola mais próximo da diretriz é o vértice.

Tarefa 12

Escreve a equação da parábola de vértice na origem, sabendo que o seu foco e o ponto de coordenadas $(0, \frac{3}{2})$.

Tarefa 13

Uma parábola tem de equação

$$x^2 = -8y$$

- Mostra que as coordenadas do foco da parábola é $(0, -2)$;
- Escreve a equação da diretriz;
- Esboça o gráfico da parábola.

Tarefa 14

Dada a parábola de equação

$$y = -4x^2$$

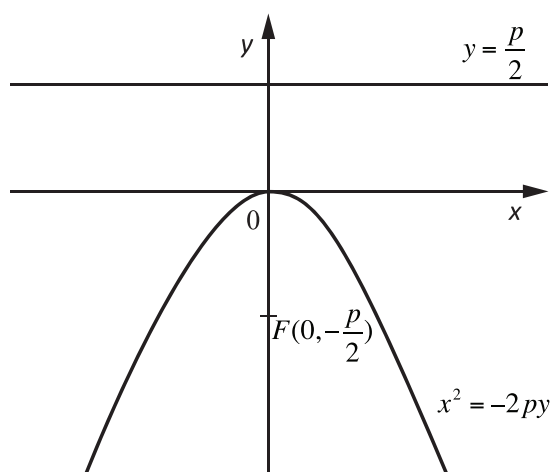
Indica,

- As coordenadas do vértice e do foco;
- A equação da diretriz.

$\overline{FD} = p$, diz-se o parâmetro da parábola.

A equação $x^2 = 2py$ define a parábola de parâmetro p , simétrica em relação ao eixo dos y , tangente no vértice ao eixo dos x e com o foco no semieixo positivo dos y .

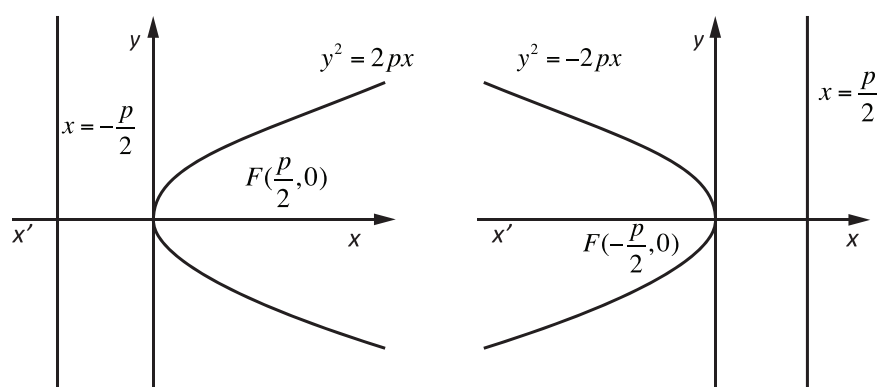
Se a parábola de parâmetro p e vértice na origem tiver o foco sobre o semieixo negativo dos y , ela ficará definida por, $x^2 = -2py$.



Se a parábola de parâmetro p e vértice na origem for simétrica em relação ao eixo dos x , a parábola ficará definida por,

$$y^2 = 2px \text{ ou } y^2 = -2px$$

Conforme o foco se situa no semieixo positivo dos x ou no semieixo negativo dos x .

**Tarefa 15**

Determina os vértices, os focos e a excentricidade de cada uma das hipérboles:

- $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
- $y^2 - 4x^2 = 4$
- $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} = 1$
- $4y^2 - 5x^2 = 5$

Exemplos:

Determina o foco e a diretriz de cada uma das parábolas, definidas por:

- $x^2 = 8y$; b) $x^2 = -12y$; c) $y^2 = 4x$; d) $y^2 = -20x$

Resolução:

- O foco esta sobre o eixo dos y . O coeficiente do termo em y é positivo logo, o foco está sobre o semieixo positivo dos y .

$$p = 4; F(0,2), \text{ Diretriz : } y = -2$$

- b) O termo do primeiro grau e o termo em y , o foco esta sobre o eixo dos y . Como o coeficiente do termo em y e negativo, o foco esta sobre o semieixo negativo dos y .

$$p = 6; F(0, -3), \text{ diretriz: } y = 3$$

- c) $p = 2; F(1, 0)$, diretriz: $x = -1$

- d) $p = 10; F(-5, 0)$, diretriz: $x = 5$

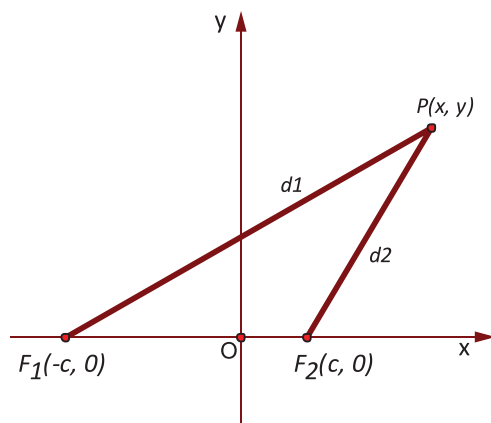
Tarefa 16

Escreve a equação reduzida da hipérbole de centro na origem do referencial, sabendo que um dos focos é o ponto de coordenadas $(5, 0)$ e o eixo transversal tem medida de comprimento 6.

A hipérbole

Chama-se hipérbole ao conjunto de pontos P do plano tais que o módulo da diferença das distâncias de P a dois pontos fixos (focos da hipérbole) é igual a um comprimento constante, não nulo mas menor que a distância entre os focos.

Consideremos os focos, no eixo do x , colocados em posição simétrica em relação a origem.



Sejam os focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ com c positivo.

Seja $P(x, y)$ um ponto pertencente a hipérbole. Satisfaz a condição que caracteriza a hipérbole, $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$, com a um valor positivo menor que c .

Pela definição de dois pontos no plano cartesiano, podemos escrever

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Tarefa 17

Escreve a equação da hipérbole de centro na origem do referencial:

- Sabendo que um dos vértices é dado por $V(2, 0)$ e um dos focos $F(4, 0)$;
- Tal que a distância focal é 12 e a medida do comprimento do eixo não transversal sobre o eixo dos y é 10.
- Que passa pelo ponto de coordenadas $(1, 2\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, -3\sqrt{2})$ e que tem focos sobre o eixo dos y .

Tarefa 18

Num referencial, consideremos os seguintes pontos,

$$P(\sqrt{6}, 0), Q(-\sqrt{6}, 0)$$

Mostra que os pontos

$$A(3, \frac{\sqrt{10}}{2}) \quad B(-4, -\sqrt{6})$$

satisfazem a seguinte condição:

$$|\overline{AP} - \overline{AQ}| = 4 = |\overline{BP} - \overline{BQ}|$$

Define a equação da cónica, relacionada com os pontos P e Q e a que pertencem os pontos A e B.

Elevando ao quadrado, tem-se

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

Simplificando,

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2$$

Elevando de novo ao quadrado

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = c^2x^2 + a^4 - 2cxa^2$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

Fazendo $c^2 - a^2 = b^2$ (recorde-se que $a < c$), podemos escrever a expressão anterior na forma $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

Dividindo ambos os membros da equação anterior por a^2b^2 ,

Obtemos a seguinte equação equivalente

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esta equação define a hipérbole nas condições indicadas.

Esboço da hipérbole

Toda a hipérbole é constituída por duas linhas continuas abertas (ramos da hipérbole), com dois eixos de simetria perpendiculares entre si e um centro de simetria, e com duas assíntotas que passam pelo centro.

Os pontos $A'(-a, 0)$ e $A(a, 0)$ em que o eixo dos x - eixo de simetria que passa pelos focos - intersecciona (atravessa) a hipérbole, dizem-se os vértices da hipérbole.

Ao segmento cujos extremos são os vértices da hipérbole, bem como o seu comprimento $2a$, dá-se o nome de eixo transversal da hipérbole.

Traçando as retas verticais $x = a$ e $x = -a$, que são tangentes a hipérbole, e unindo os pontos de interseção destas verticais com as assíntotas por segmentos horizontais obtém-se um retângulo.

Os lados horizontais deste retângulo interseccionam o eixo dos y nos pontos $(0, b)$ e $(0, -b)$.

Ao segmento de reta que une estes dois pontos, bem como o seu comprimento $2b$, dá-se o nome de eixo não transversal.

A distância $2c$ entre os focos e a distância focal.

Tarefa 19

Considera a cónica de equação:

$$4x^2 - y^2 = 16$$

- Identifica no referencial o conjunto dos pontos que satisfazem a condição dada;
- Indica a transformada da cónica na translação associada ao vetor de coordenadas $(-3, 4)$ e faz a representação gráfica.

Os semieixos transverso e não transverso e a semidistância focal estão relacionados pela fórmula

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Chama-se excentricidade da hipérbole à constante

$$e = \frac{c}{b} \frac{(\text{semidistância focal})}{(\text{semieixo transverso})}$$

Como $a < c$, toda a hipérbole tem excentricidade superior a 1.

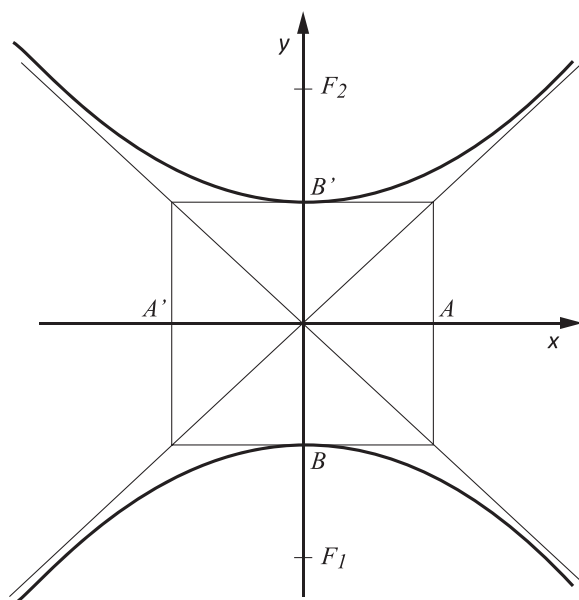
A equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ é a **equação reduzida** da hipérbole referida aos eixos de simetria e com os focos situados sobre o eixo dos x.

Se os focos estiverem sobre o eixo dos y, simetricamente em relação a origem, e se os semieixos transverso e não transverso forem respetivamente b e a , a hipérbole referida aos eixos de simetria ficará definida pela equação reduzida

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Com $c^2 = a^2 + b^2$, $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$

A excentricidade é $\frac{c}{b}$



Quando se considera uma translação de uma hipérbole segundo um vetor

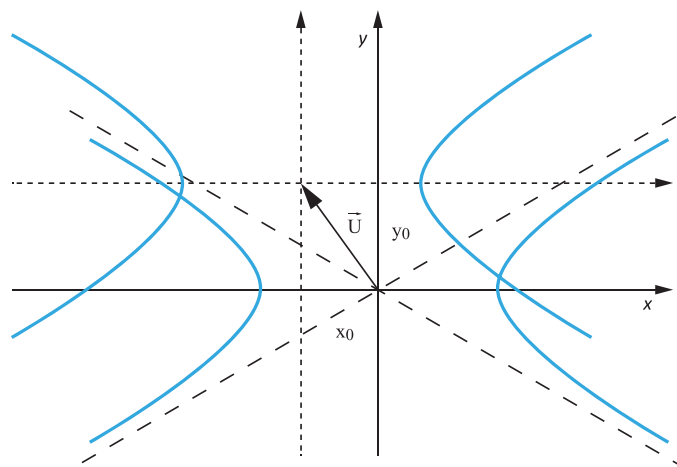
$\vec{u} = (x_0, y_0)$. Graficamente temos, por exemplo:

Tarefa 20

Considera a cónica de equação,

$$x^2 - y^2 = 4$$

Justifica que se trata de uma hipérbole equilátera e apresenta a sua representação gráfica.



Exemplos

A equação

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

define a elipse que é simétrica em relação às retas $x-3=0$ e $y=2$ e de eixo horizontal $y=2\sqrt{9}=6$ e eixo vertical $x=2\sqrt{16}=8$.

A equação

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

define a elipse cujo centro é o ponto $(-1,0)$ e que tem eixo horizontal igual a $y=10$ e o eixo vertical igual a $x=8$.

A equação

$$\frac{y^2}{4} - \frac{(x-4)^2}{9} = 1$$

define a hipérbole que tem centro no ponto $(4,0)$, o eixo transverso vertical igual a $x=4$ e o eixo não transverso igual a 6.

	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$
Centro	(x_0, y_0)	(x_0, y_0)
Eixos de simetria	$x_0 = y_0, y = y_0$	$x_0 = y_0, y = y_0$
Vértices	$(c+x_0, y_0)$ $(-c+x_0, y_0)$	$(x_0, c+y_0)$ $(x_0, -c+y_0)$
Diretrizes	$x = \pm \frac{a^2}{c} + x_0$	$y = \pm \frac{b^2}{c} + y_0$

Exemplo:

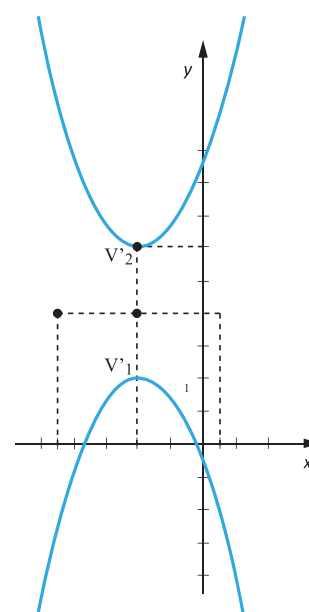
Escreve uma equação reduzida da hipérbole, sabendo que:

- os vértices são os pontos de coordenadas $(-2,2)$ e $(-2,6)$
- o eixo não transverso tem de medida de comprimento 5

Resolução:

- Sejam $V_1(-2,2)$ e $V_2(-2,6)$

Recorrendo à representação gráfica:



O eixo transversal é definido por $[V_1, V_2]$, eixo paralelo ao eixo dos y, logo:

$$2b = 4 \Leftrightarrow b = 2$$

O eixo não transversal, paralelo ao eixo dos x, tem de medida de comprimento 5, ou seja:

$$2a = 5 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2}$$

O centro da hipérbole é o ponto médio do segmento $[V_1, V_2]$, donde se pode escrever

$$M\left(\frac{-2-2}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = (-2, 4)$$

A equação reduzida da hipérbole é:

$$\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x+2)^2}{\frac{25}{4}} = 1 \Leftrightarrow \frac{(y-4)^2}{4} - \frac{4(x+2)^2}{25} = 1$$

Hipérboles equiláteras (caso particular)

As hipérboles em que $a = b$, chamam-se **hipérboles equiláteras**.

Consoante os focos estejam no eixo das abcissas ou no eixo das ordenadas a equação reduzida de uma hipérbole equilátera é dada, respetivamente, por:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = a^2 ; \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 - x^2 = a^2$$

Para qualquer uma das situações anteriores temos que a:

A distância focal é dada por $c = a\sqrt{2}$, atendendo a que

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ e } a = b$$

$$\text{Donde } c^2 = 2a^2 \Rightarrow c = a\sqrt{2}$$

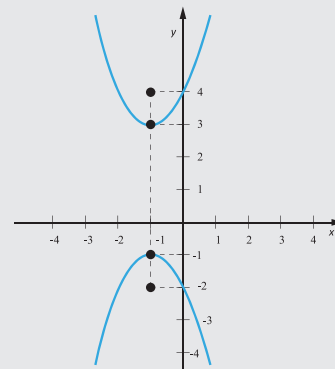
A excentricidade é dada por $e = \sqrt{2}$ atendendo a que

$$e = \frac{c}{a} \text{ e } c = a\sqrt{2}$$

$$\text{Donde, } e = \frac{a\sqrt{2}}{a} \Leftrightarrow e = \sqrt{2}$$

Tarefa 21

Observe a seguinte representação gráfica e escolha a equação que lhe corresponde, justificando.



a) $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{5} = 1$

b) $\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{5} = 1$

c) $\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{5} = 1$

Nota

A transformada de uma hipérbole equilátera, simétrica em relação aos eixos coordenados, numa rotação de no sentido direto e de centro O (origem do referencial), ocupa uma posição diferente traduzida pela equação, com k uma constante.

Tarefa 22

- Determine uma equação da parábola cujo foco é o ponto $(-1, -2)$ e o vértice é o ponto $(-1, -4)$. Faça a representação gráfica.
- O centro de uma elipse é $(2, 2)$, um dos vértices do eixo maior é $(5, 2)$ e a excentricidade é $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Indica a equação da elipse referida aos eixos de simetria e faz a representação gráfica.
- Relativamente a uma hipérbole sabe-se que
 - $(-1, 2)$ é o centro
 - um dos vértices é o ponto $(-1, 0)$

Determina a equação da hipérbole, sabendo que passa pelo ponto $(0, -3)$

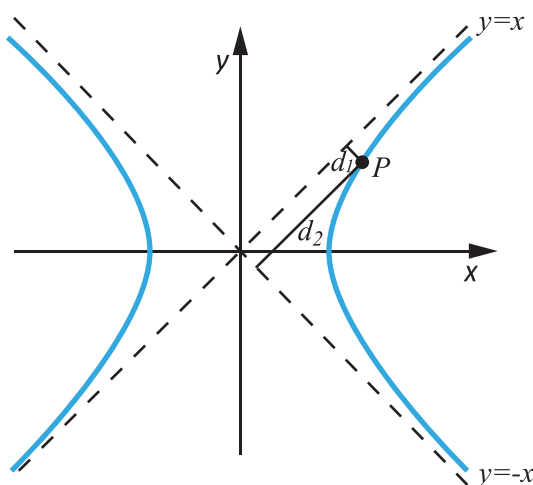
Nota histórica

Apolónio, matemático e astrónomo grego do séc. III a. C., desenvolveu estudos sobre as secções cónicas.

Este trabalho é considerado um dos mais notáveis da geometria clássica grega.

Em síntese

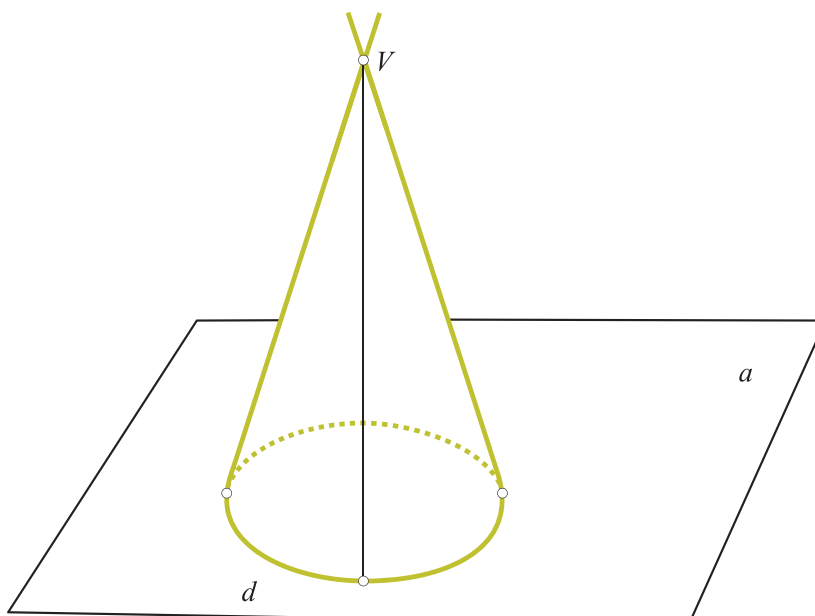
	$x^2 - y^2 = a^2$	$y^2 - x^2 = a^2$
Focos	$(\pm a\sqrt{2}, 0)$	$(0, \pm a\sqrt{2})$
Vértices	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
Diretrizes	$x = \pm \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$y = \pm \frac{a\sqrt{2}}{2}$



Superfícies cónicas e cilíndricas

Seja d uma linha contínua situada num plano a e seja V um ponto exterior a esse plano.

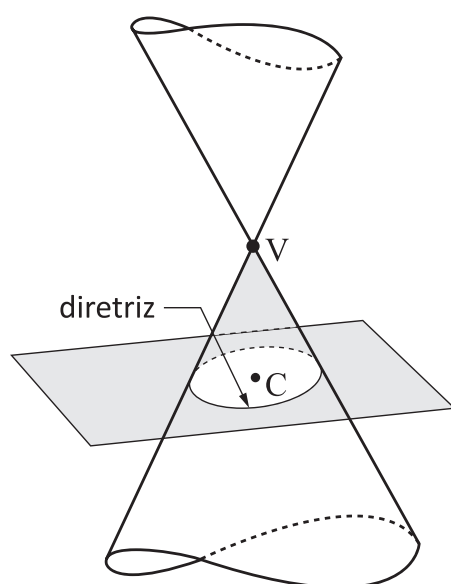
A superfície cónica de vértice V e de diretriz d é a reunião das retas que passam por V e interseçam d .



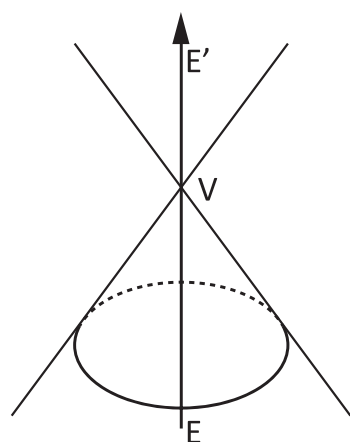
Assim, uma superfície cônica pode ser gerada por uma reta que, apoiando-se numa linha plana (diretriz d) se move, mantendo fixo um ponto (vértice).

Cada uma das retas que passa pelo vértice e intersesta a diretriz é uma **geratriz** da superfície cônica.

Tomando para diretriz uma circunferência e considerando o vértice situado na reta perpendicular ao plano da circunferência e que passa pelo centro desta, obtém-se uma superfície cônica de revolução.



Uma superfície cônica de revolução pode ser obtida por uma reta que roda em torno de outra que a intersesta. A reta em torno da qual se efetua a rotação é o eixo da superfície. Na figura o eixo é $E'E$.



Tarefa 23

Desenha um triângulo retângulo e recorta-o.

Roda-o sobre um dos catetos.
Que superfície se obtém?

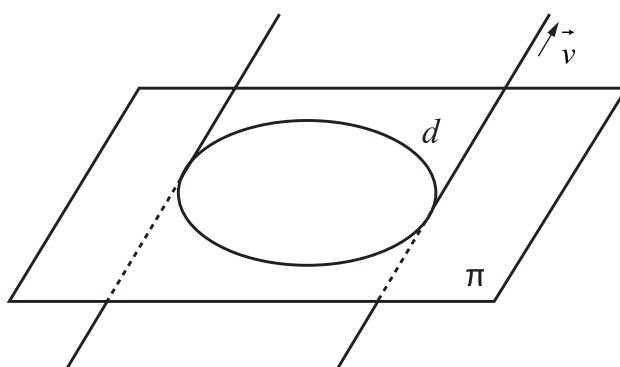
Tarefa 24

Desenha um retângulo e recorta-o.

Roda-o sobre um dos lados.

Que superfície se obtém?

Seja d uma linha contínua situada num plano π e seja \vec{v} um vetor não paralelo a π .



A reunião das retas que têm a direcção de \vec{v} e intersectam d é uma superfície cilíndrica.

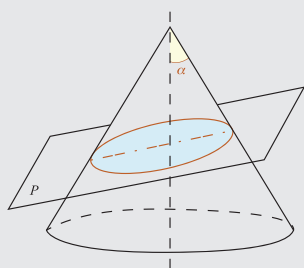
A linha d é a diretriz da superfície e cada uma das retas que têm a direcção do vetor \vec{v} e intersectam a linha d é uma geratriz da superfície cilíndrica.

Tomando para diretriz uma circunferência e considerando as geratrizes perpendiculares ao plano da circunferência, fica definida uma **superfície cilíndrica de revolução**.

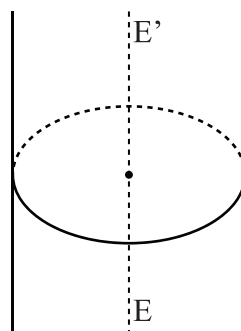
Uma superfície cilíndrica de revolução pode ser gerada, rodando uma reta em torno de outra que lhe seja paralela (eixo).

Nota

A elipse é uma curva obtida por corte de um cone de revolução por um plano P , que faz com o eixo do cone um ângulo superior a α , semiângulo do vértice (ver figura seguinte).

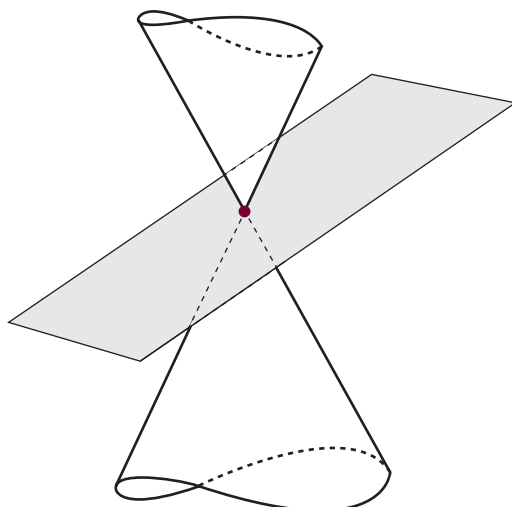


Na figura seguinte o eixo é $E E'$.

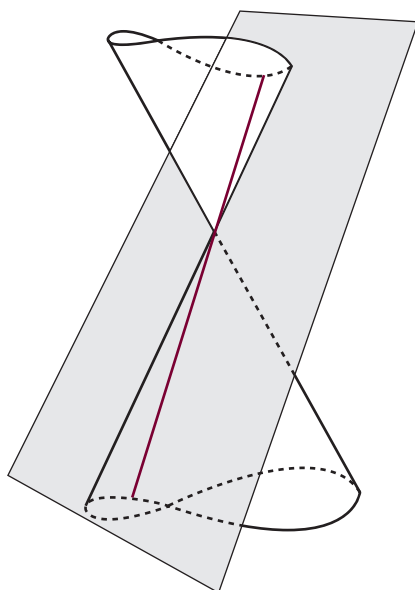


As cónicas são secções planas de qualquer superfície cónica de revolução. O plano que passa pelo vértice duma superfície cónica de revolução pode intersectar esta superfície segundo:

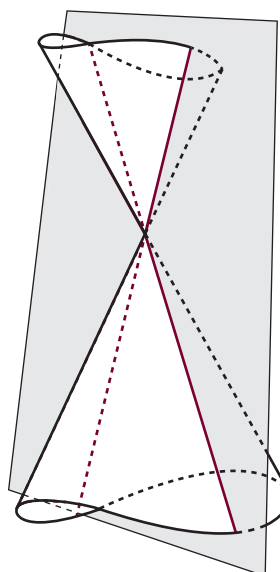
- Um ponto - o próprio vértice (se o vértice for o único ponto em que o plano intersecta as geratrizes);



- Uma reta - uma geratriz (se o plano for tangente superfície cônica);

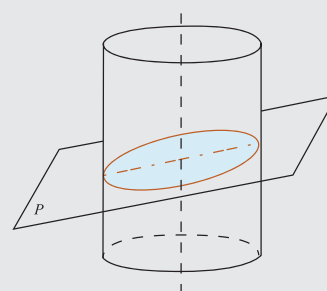


- Duas retas concorrentes - duas geratrizes.



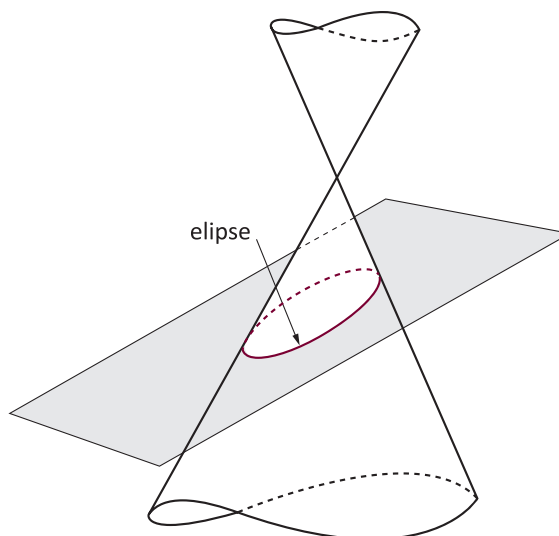
Nota

Também podemos obter uma elipse por interseção de um cilindro de revolução por um plano não paralelo às bases.

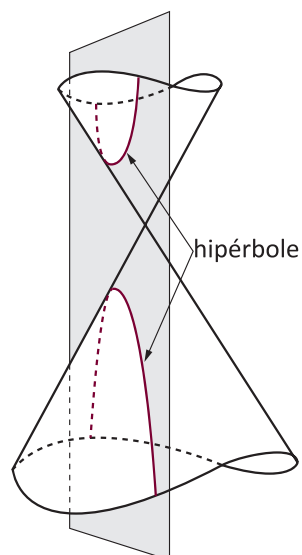


Um plano que não passa pelo vértice pode interseccionar a superfície cônica segundo:

- Uma elipse - o plano secante intersecciona todas as geratrizes;



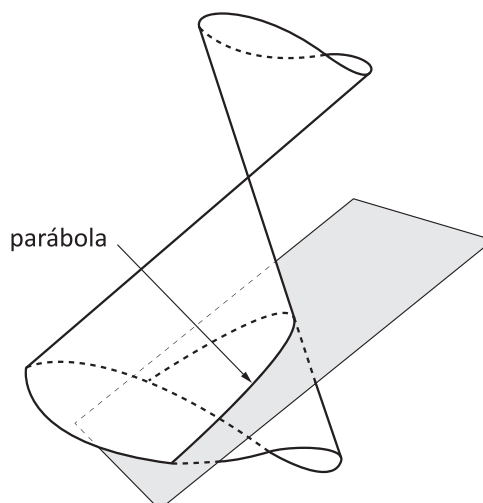
- Uma hipérbole - o plano secante é paralelo a duas geratrizes distintas;



Nota

No espaço os ramos de hipérbole são ilimitados.

- Uma parábola - quando o plano secante é paralelo a uma só geratriz.



Nota

No espaço um ramo de parábola é ilimitado.

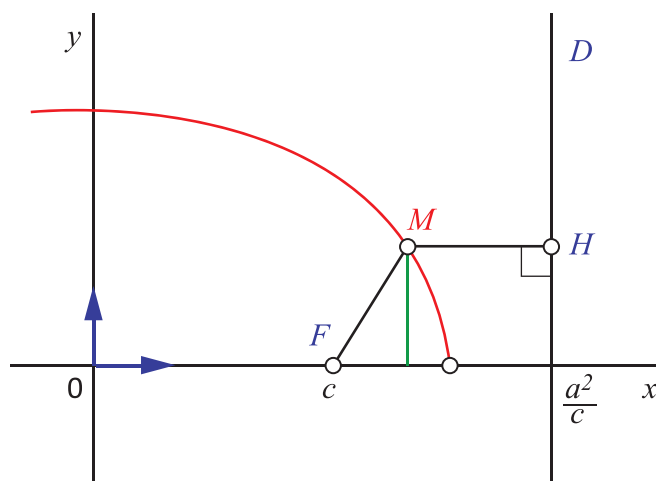
Outra definição de elipse

Seja D a reta de equação $x = \frac{a^2}{c}$ e H a projeção sobre D de um ponto M da elipse.

Temos que $MH = \frac{a^2}{c} - a \cos t = a(\frac{a}{c} - \cos t)$

Ou $MF = a - c \cos t$

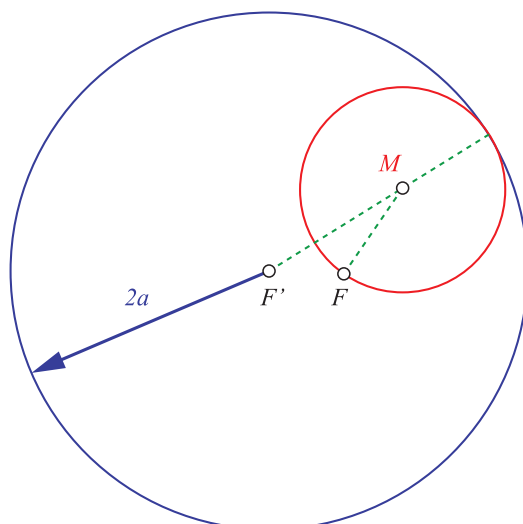
Donde $\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$



Assim, a elipse é o conjunto de pontos do plano M em que a razão das distâncias de cada ponto da elipse ao foco (F) e à diretriz (D) é igual à excentricidade, e , da elipse.

A excentricidade da elipse é inferior a 1.

A elipse é também o lugar geométrico dos pontos M , centros das circunferências, tangentes interiormente à circunferência de centro F' e raio $2a$, passando pelo ponto F , com $FF' = 2c$ ($c < a$).



Nota

Excentricidade

e designa a excentricidade de uma cónica.

Se $e < 1$, a cónica é uma elipse.

Se $e = 1$, a cónica é uma parábola

Se $e > 1$, a cónica é uma hipérbole.