

### Questão Resolvida

1. Um cubo de madeira ( $\rho_{\text{madeira}} = 0,65 \text{ g/cm}^3$ ), com 20 cm de aresta, flutua na água ( $\rho_{\text{água}} = 1,0 \text{ g/cm}^3$ ). Determine a altura do cubo que permanece dentro de água.

#### Resolução:

1.

$$V_{\text{cubo}} = \text{base} \times \text{altura}$$

$$M_{\text{cubo}} = \rho_{\text{madeira}} \times \text{base} \times \text{altura}$$

$$\text{O módulo do peso do cubo, } P_{\text{cubo}} = \rho_{\text{madeira}} \times \text{base} \times \text{altura} \times g$$

Para o cubo flutuar, o módulo do peso tem de ser igual ao módulo da impulsão. Tendo em conta a Lei de Arquimedes, temos

$$\rho_{\text{madeira}} \times \text{base} \times \text{altura} \times g = \rho_{\text{água}} \times \text{base} \times \text{altura}_{\text{imersa}} \times g$$

$$\text{altura}_{\text{imersa}} = \rho_{\text{madeira}} \times \text{altura} / \rho_{\text{água}} = 13 \text{ cm.}$$

## 5 Pressão atmosférica. Experiência de Torricelli

A pressão atmosférica foi determinada pela primeira vez em 1643, através da experiência realizada pelo italiano [Evangelista Torricelli](#). Para isso, Torricelli construiu um barómetro. Encheu um tubo, com cerca de 1 m de comprimento, com mercúrio, como mostra a figura 44. Tapou a abertura e inverteu-o numa tina com o mesmo líquido. Ao destapar a abertura do tubo, verificou que o mercúrio desceu um pouco. Torricelli apurou assim que a coluna de mercúrio não se esvaziou completamente pois era sustentada por forças de pressão devidas à atmosfera. No ponto B, a pressão é nula, pois a pressão exercida por algum do vapor de mercúrio é muito baixa. Todos os pontos ao nível do ponto A estão à pressão atmosférica, como o ponto C.

$$\text{Assim, } p_C = p_A$$

$$p_0 = p_B + \rho_{\text{Hg}} g h$$

$$\text{Como } p_B = 0, \text{ vem}$$

$$p_0 = \rho_{\text{Hg}} g h$$

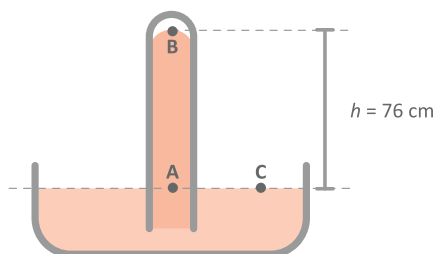


Figura 44 – Um tubo de mercúrio invertido desce no tubo e mantém-se à altura de 76 cm.

Assim, a altura da coluna de mercúrio, permitiu a Torricelli medir diretamente a pressão atmosférica. Verificou ainda que a altura da coluna de mercúrio não era sempre constante, mas variava um pouco, durante o dia e a noite. Concluiu daí, corretamente, que essas variações mostravam que a pressão atmosférica podia variar.

Convencionou-se que a pressão atmosférica normal é 1 atmosfera, que corresponde a 76 cm de mercúrio. Ainda hoje, quando se refere a pressão atmosférica, e para recordar a experiência de Torricelli, esta indica-se em milímetros ou centímetros de mercúrio.

No Sistema Internacional de Unidades, a pressão atmosférica normal é:

$$1 \text{ atm} = \rho_{Hg} g h = 13,6 \times 10^3 \times 9,8 \times 0,76 = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

## 6 Aplicações

### 6.1 Aparelhos hidráulicos: prensa hidráulica, bomba hidráulica e manómetros de pressão

A **prensa hidráulica** é uma aplicação da Lei de Pascal. Consiste em dois recipientes cilíndricos providos de êmbolos com áreas diferentes que comunicam entre si, como se mostra na figura 45.

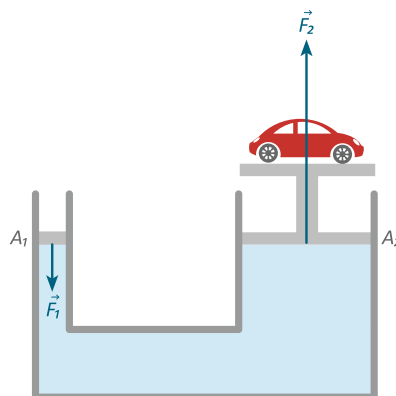


Figura 45 – Elevador de automóveis.

De acordo com a Lei de Pascal, um acréscimo de pressão num dos êmbolos transmite-se a todos os pontos do fluido. Assim, se for aplicada uma força de intensidade  $\vec{F}_1$  no êmbolo com menor área surgirá um acréscimo de pressão,  $\Delta p = \frac{F_1}{A_1}$ , que se transmite a todos os pontos do fluido e das paredes do recipiente, incluindo o outro êmbolo. O êmbolo de maior área ficará sujeito a uma força adicional de intensidade  $F_2 = A_2 \Delta p$ .

A conjugação das duas expressões permite determinar a **vantagem mecânica** da prensa hidráulica, como a razão entre  $F_2$  e  $F_1$ .

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1}$$

Na prensa hidráulica as forças em cada êmbolo são diretamente proporcionais às áreas dos êmbolos.

### Questão Resolvida

1. Os êmbolos de uma prensa hidráulica têm áreas de  $2 \text{ cm}^2$  e  $2 \text{ m}^2$ . Colocou-se sobre o êmbolo de menor área uma massa de  $5 \text{ kg}$ , ficando o corpo no outro êmbolo em equilíbrio. Desprezando a massa dos êmbolos, determine a massa do corpo.

**Resolução:**

$$1. \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1} \Leftrightarrow \frac{m_2 g}{5 g} = \frac{2}{2 \times 10^{-4}} \Leftrightarrow m_2 = 5 \times 10^4 \text{ kg}.$$

Tal como a prensa hidráulica, a **bomba hidráulica** é uma aplicação da Lei de Pascal. Consiste num circuito hidráulico de secção variável, que permite «amplificar» a força exercida numa das extremidades, como se mostra na figura 46.

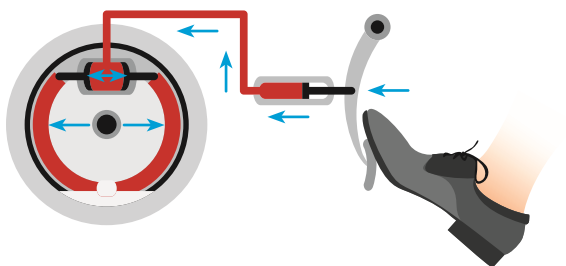


Figura 46 – Bomba hidráulica utilizada no sistema de travões de alguns automóveis.

Os **manómetros de pressão** são uma aplicação da Lei Fundamental da Hidrostática. Têm como função medir diferenças de pressão. A altura da coluna de líquido permite saber a pressão no tubo,  $p$ , em relação à pressão atmosférica.

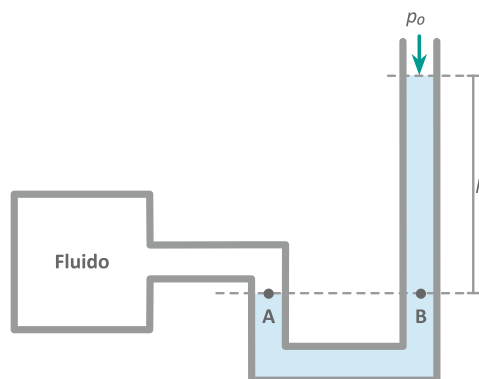


Figura 47 – Esquema do manómetro de pressão.

$$p_A = p_B$$

$$p_A = p_0 + \rho g h$$

$$p = p_0 + \rho g h$$

## 6.2 Equilíbrio de corpos flutuantes

Quando se coloca um corpo no interior de um fluido, este pode:

- **afundar**, se o módulo da impulsão ( $\rho_{\text{fluido}} V_{\text{corpo}} g$ ) for inferior ao módulo da força da gravidade ( $\rho_{\text{corpo}} V_{\text{corpo}} g$ ), isto é,  $\rho_{\text{fluido}} < \rho_{\text{corpo}}$ ;
- **flutuar** no interior do fluido, se o módulo da impulsão ( $\rho_{\text{fluido}} V_{\text{corpo}} g$ ) for igual ao módulo da força da gravidade ( $\rho_{\text{corpo}} V_{\text{corpo}} g$ ), isto é,  $\rho_{\text{fluido}} = \rho_{\text{corpo}}$ ;
- **emergir**, se o módulo da impulsão ( $\rho_{\text{fluido}} V_{\text{corpo}} g$ ) for superior ao módulo da força da gravidade ( $\rho_{\text{corpo}} V_{\text{corpo}} g$ ), isto é,  $\rho_{\text{fluido}} > \rho_{\text{corpo}}$ . O corpo irá emergir até se verificar a condição de flutuação.

Contudo, um corpo a flutuar só se encontra em equilíbrio quando o **centro de massa** do corpo se encontra alinhado com o centro de massa do volume deslocado, chamado **centro de impulsão**. A linha vertical que passa pelo centro de massa do corpo e pelo centro de impulsão chama-se de **linha de simetria**. Quando estes não se encontram alinhados o corpo poderá rodar.

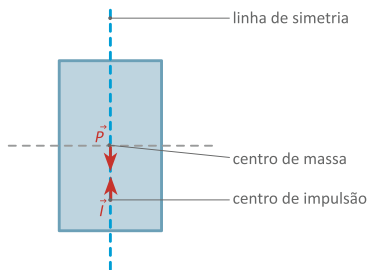


Figura 48 – Situação de equilíbrio.

Para se alterar o centro de impulsão de um corpo a flutuar, em relação ao centro de massa do corpo, tem-se de variar o volume do fluido deslocado. Assim, considere-se, que se inclina um corpo, num ângulo  $\Delta\theta$ , como se mostra na figura 49.

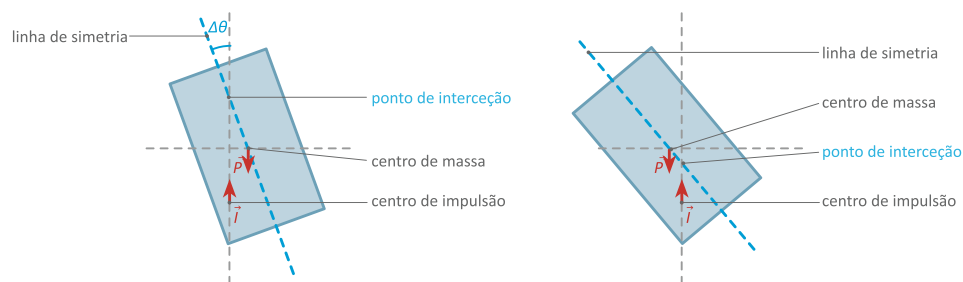


Figura 49 – Equilíbrio estável e equilíbrio instável.

O corpo tenderá a retomar a posição de equilíbrio inicial, sempre que o ponto de interseção entre a linha vertical que passa pelo centro de impulsão e a linha de simetria se encontra acima do centro de massa do corpo. O corpo encontra-se em **equilíbrio estável**.

O corpo encontra-se no **equilíbrio instável**, sempre que, o ponto de interseção entre a linha vertical que passa pelo centro de impulsão e a linha de simetria se encontra abaixo do centro de massa do corpo. O corpo tenderá a afastar-se da posição de equilíbrio inicial.



## Atividade Prático-laboratorial

### APL B-1.1: Lei de Arquimedes

**Questão-problema:** Porque diz a lenda que Arquimedes saiu nu à rua a gritar Eureka! Eureka!?

**Objetivo:** Relacionar o volume do fluido deslocado e a densidade do fluido com a impulsão.

#### Questões pré-laboratoriais:

1. Identifique o que poderá acontecer a um objeto quando colocado no interior de um fluido.

#### Recursos:

- Dois corpos de igual massa e diferente volume
- Gobelé
- Dinamómetro
- Água
- Azeite

#### Procedimento:

1. Pese, com um dinamómetro, o corpo.
2. Introduza o corpo dentro de um copo graduado com água e registre o seu peso e a variação de volume.
3. Proceda da mesma forma, alterando:
  - o corpo;
  - o fluido.

#### Questões pós-laboratoriais:

1. Estabeleça a expressão que permite determinar a impulsão.
2. Determine a impulsão nas quatro situações.
3. Compare o valor obtido experimentalmente com o previsto e calcule a percentagem de erro.

## Atividade Prática de Sala de Aula

### APSA B-1.1: Pressão atmosférica

**Questão-problema:** Como medir a pressão atmosférica?

**Objetivo:** Exploração do funcionamento do barômetro de Torricelli, tendo em conta a Lei Fundamental da Hidrostática.

**Recursos:**

- Manual

**Procedimento:**

O físico italiano Evangelista Torricelli, em 1643, não apenas demonstrou a existência da pressão do ar, mas inventou um aparelho capaz de a medir: o barômetro.

1. Que observou Torricelli, aquando da determinação da pressão atmosférica?
2. Indique o que aconteceria caso fosse usado, no tubo, um fluido de densidade menor que a do mercúrio.

## Atividade Prática de Sala de Aula

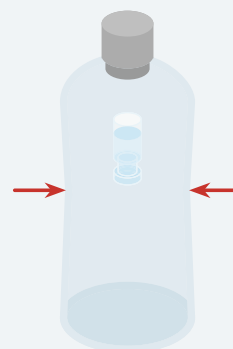
### APSA B-1.2: Lei de Pascal

**Questão-problema:** Como construir um ludião?

**Objetivo:** Construir um ludião.

**Recursos:**

- Computador com ligação à Internet
- 1 Garrafa de plástico de 1/2 litro
- 1 Ampola de vidro



**Procedimento:**

Um corpo flutua no interior de um fluido, se o módulo da força da gravidade for igual ao módulo da impulsão. Se se variar a pressão num ponto do fluido em equilíbrio, esta transmite-se integralmente a todos os pontos do fluido e às paredes que o contém. Se aumentar a pressão num ponto do fluido, esse aumento transmite-se a todos os pontos do fluido. Assim, o ar dentro da ampola é comprimido, diminuindo o seu volume e, por isso, aumentando o seu peso. Se o módulo da força da gravidade for superior ao módulo da impulsão, a ampola afunda-se.

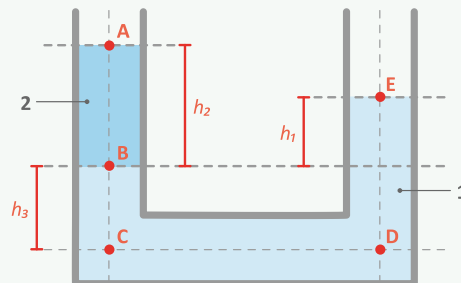
1. Pesquise na Internet simulações do comportamento estático e dinâmico do ludião.
2. Encha a garrafa com água.
3. Encha a ampola com aproximadamente metade da sua capacidade com água.
4. Usando o dedo indicador tape a entrada da ampola e coloque-a no interior da garrafa de plástico com a entrada voltada para baixo.
5. Certifique-se que a ampola com água se encontra totalmente submersa. Caso não se verifique, aumente ou diminua a quantidade de água no seu interior.
6. Feche a garrafa de plástico.
7. Aperte ligeiramente a garrafa de plástico e verifique o que acontece.
8. Represente esquematicamente as forças no ludião, nas várias situações.

## Resumo

- Os líquidos e os gases designam-se por fluidos.
- Lei Fundamental da Hidrostática,  $p = p_0 + \rho g h$ .
- A pressão não depende da forma do recipiente que contém o líquido.
- A Lei de Pascal diz que uma variação de pressão num ponto de um fluido em equilíbrio transmite-se a todos os pontos do fluido e às paredes que o contém.
- A impulsão é uma força vertical, dirigida de baixo para cima, de intensidade igual ao peso do volume de fluido deslocado pelo corpo.
- A impulsão depende da densidade do fluido e do volume deslocado.

## Questões para Resolver

1. Observe os líquidos não miscíveis em equilíbrio.

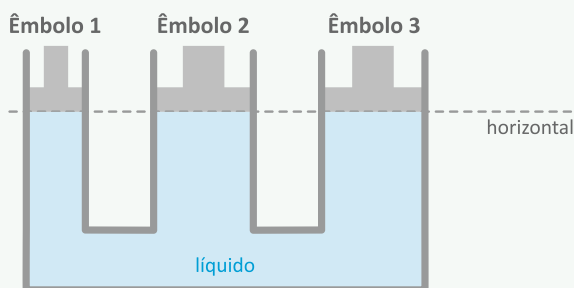


- 1.1. A razão entre a densidade dos dois líquidos é igual a 2. Determine  $\frac{h_1}{h_2}$ .
- 1.2. Esboce um gráfico que traduza a pressão exercida pelo líquido com a profundidade, quando se percorrem sucessivamente os pontos A, B, C, D e E.

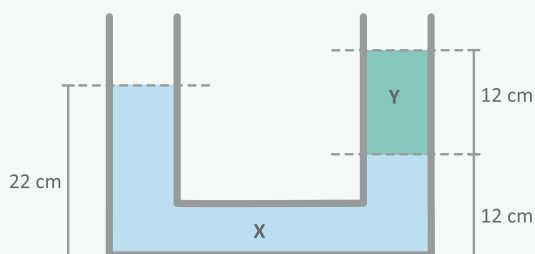
2. Considere uma prensa hidráulica, cujos êmbolos A e B têm respectivamente  $400 \text{ cm}^2$  e  $1,2 \text{ m}^2$ . Sobre o êmbolo A é aplicada uma força de módulo  $50 \text{ N}$ , ficando o corpo sobre o êmbolo B em equilíbrio. Determine a massa do corpo que está sobre o êmbolo B. Despreze o peso dos êmbolos. Considere  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

3. Os icebergues são gigantescos blocos de gelo que flutuam no mar. Sendo a densidade da água salgada igual a  $1,024 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , determine a fração do seu volume submerso.

4. Considere o sistema de vasos comunicantes constituído por três êmbolos cilíndricos todos ao mesmo nível. Sobre o êmbolo 1, o líquido em equilíbrio estático exerce uma força de  $600 \text{ N}$  e a área do êmbolo 1 é metade da área dos êmbolos 2 e 3. Determine as forças que os êmbolos 2 e 3, respectivamente, fazem no líquido.



5. Na figura, encontram-se dois líquidos homogêneos não miscíveis, em equilíbrio. Calcule o valor da razão entre as densidades dos líquidos.



6. Um gás encontra-se contido sob pressão de  $8 \text{ mbar}$  no interior de um recipiente cúbico, cujas faces possuem uma área de  $4,0 \text{ m}^2$ . Calcule o módulo da força média exercida pelo gás sobre cada face do recipiente?

7. Determine a profundidade máxima que um mergulhador pode atingir em segurança em água salgada, sabendo que o organismo humano pode ser submetido, sem prejuízo para a saúde, a uma pressão de  $4,0 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ . Considere densidade de água salgada  $1,03 \text{ g/cm}^3$  e  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

## B-2 Hidrodinâmica

### 1 Movimento dos fluidos em regime estacionário

A Hidrodinâmica estuda o movimento dos fluidos, isto é, líquidos e gases. Como, por exemplo, a água a escoar ao longo de um tubo ou no leito de um rio, o sangue a correr pelas veias ou o fumo emitido por uma chaminé.

#### Quais os movimento que um fluido pode ter?

O escoamento de um fluido pode ocorrer de um modo **turbulento**, como numa cascata, onde a velocidade em cada ponto muda de instante para instante; ou em regime **estacionário**, como num tubo, se a velocidade do fluido não variar em cada ponto, no decorrer do tempo, embora possa variar de ponto para ponto. Neste regime, partículas diferentes do fluido, ao passarem por um mesmo ponto, têm a mesma velocidade.

Neste estudo, vai-se considerar sempre o escoamento em regime estacionário.

A trajetória descrita por uma partícula do fluido, que escoar em regime estacionário, denomina-se **linha de corrente**, que é uma linha tangente à velocidade em cada ponto.

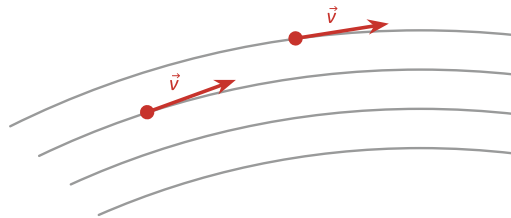


Figura 50 – As linhas de corrente de um fluido são linhas tangentes à velocidade em cada ponto.

#### A saber:

*Um fluido ideal não é viscoso e é incompressível.*

Também se vai considerar neste estudo, que o fluido é **ideal**, isto é, **incompressível**, pois a densidade do fluido não varia ao longo do percurso, e **não-viscoso**, o que significa que não há dissipação de energia ao longo do trajeto do fluido. A viscosidade no movimento dos fluidos é análoga ao atrito no movimento dos sólidos.

## 2 Conservação da massa e Equação da Continuidade

A figura 51 representa um fluido com escoamento estacionário ao longo de um tubo de secção transversal variável.

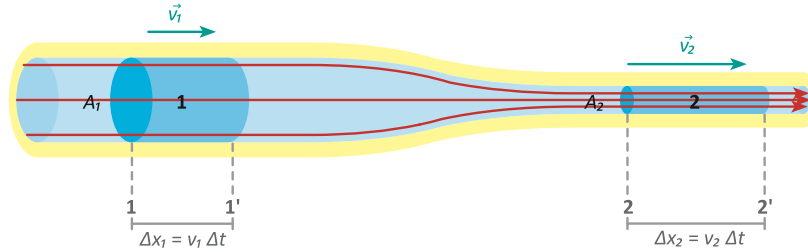


Figura 51 – Escoamento estacionário de um fluido ideal através de um tubo de secção variável.

Em 1, a área da secção reta do tubo é  $A_1$  e a velocidade do fluido é  $\vec{v}_1$ . Em 2, a área é  $A_2$  e a velocidade é  $\vec{v}_2$ .

No intervalo de tempo  $\Delta t$ , passa em 1 o volume de fluido  $\Delta V_1$ , que pode ser expresso por:

$$\Delta V_1 = A_1 \Delta x_1 = A_1 v_1 \Delta t$$

Sendo a massa volúmica do fluido constante, e dada por

$$\rho = \frac{m}{V}$$

pode-se expressar a massa,  $m$ , que passa na secção 1 por:

$$m_1 = \rho A_1 v_1 \Delta t$$

No mesmo intervalo de tempo, passa o mesmo fluido em 2,

$$\Delta V_2 = A_2 \Delta x_2 = A_2 v_2 \Delta t$$

$$m_2 = \rho A_2 v_2 \Delta t$$

A massa de fluido no volume  $\Delta V_1$  é igual à massa de fluido no volume  $\Delta V_2$ , ou seja

$$m_1 = m_2$$

$$\rho A_1 v_1 \Delta t = \rho A_2 v_2 \Delta t$$

Simplificando, vem:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Esta expressão traduz a [Equação da Continuidade](#), que exprime a conservação da massa no movimento dos fluidos incompressíveis.

A Equação da Continuidade mostra que a velocidade de um fluido aumenta quando a área da secção diminui.

Este facto é visível quando se tapa parcialmente a saída de água de uma mangueira.

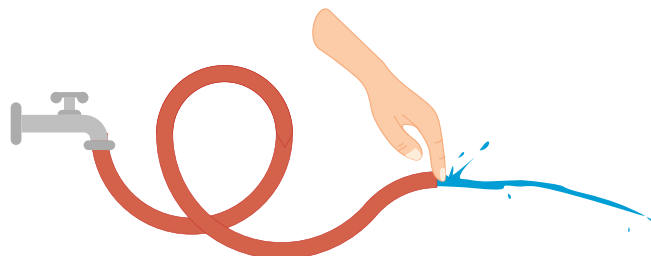


Figura 52 – Tapar parcialmente a saída de água faz aumentar a sua velocidade.

Esta equação também pode ser expressa genericamente por:

$$A v = \text{constante}$$

Define-se **caudal volumétrico**,  $\phi$  como

$$\phi = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Atendendo a que  $\Delta V = A v \Delta t$  e substituindo na equação anterior vem:

$$\phi = A v$$

#### A saber:

*Num escoamento estacionário, o caudal volumétrico é constante.*

A unidade SI de caudal volumétrico é o metro cúbico por segundo,  $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

### Questão Resolvida

1. O sangue flui na artéria aorta de um adulto, de raio 1,0 cm, com velocidade 0,33 m/s e encontra uma zona onde o raio se reduz para  $8,0 \times 10^{-3}$  m.
  - 1.1. Calcule o módulo da velocidade do sangue no estreitamento.
  - 1.2. Determine o volume de sangue que passa por segundo numa secção reta da artéria.
  - 1.3. Sendo 5,0 litros o volume de sangue no organismo, estime o tempo médio que o sangue leva para voltar ao coração.
  - 1.4. Calcule o número de vasos capilares por onde vai fluir o sangue desta artéria, sabendo que o diâmetro de um capilar é de cerca de  $4,0 \times 10^{-4}$  cm e a velocidade média é de  $6,0 \times 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .



### Resolução:

1.1. Pela equação da continuidade,

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \text{ e sendo } A = \pi r^2$$

Substituindo os valores, tem-se:

$$\pi \times (1,0 \times 10^{-2})^2 \times 0,33 = \pi \times (8,0 \times 10^{-3})^2 \times v_2 \Leftrightarrow v_2 = 0,51 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

1.2. O volume de sangue que passa por segundo numa secção reta da artéria é o caudal.

$$\emptyset = A v$$

Substituindo os valores, tem-se:

$$\emptyset = \pi \times (1,0 \times 10^{-2})^2 \times 0,33 \Leftrightarrow \emptyset = 1,04 \times 10^{-4} \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$$

1.3. Partindo do caudal  $\emptyset = \frac{\Delta V}{\Delta t}$  cujo valor é  $\emptyset = 1,04 \times 10^{-4} \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$  e substituindo o volume de sangue, vem:

$$1,04 \times 10^{-4} = \frac{5,0 \times 10^{-3}}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = 48 \text{ s}.$$

1.4. Pela equação da continuidade

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \text{ e sendo } A_2 = n A_{\text{cada capilar}}$$

Substituindo os valores, tem-se:

$$\pi \times (1,0 \times 10^{-2})^2 \times 0,33 = n \times \pi \times (2,0 \times 10^{-6})^2 \times 6,0 \times 10^{-4} \Leftrightarrow n = 1,4 \times 10^{10} \text{ capilares}.$$

## 3 Conservação de energia mecânica e Equação de Bernoulli

Daniel Bernoulli, no século XVIII, mostrou experimentalmente que, num ponto de um fluido onde a velocidade é maior, a pressão é menor. Ficou conhecido como [Princípio de Bernoulli](#).

Também estabeleceu, partindo de considerações energéticas aplicadas ao escoamento de fluidos, a Equação Fundamental da Hidrodinâmica ou [Equação de Bernoulli](#). Tal equação relaciona a pressão, o desnível e a velocidade de um fluido ideal, num escoamento estacionário, através de um tubo com área de secção variável.



Daniel Bernoulli (1700-1782)

### Como se relaciona a pressão, o desnível e a velocidade de um fluido ideal?

Um fluido incompressível e não viscoso, de densidade  $\rho$ , escoa por uma canalização em regime estacionário, como se mostra na figura 53.

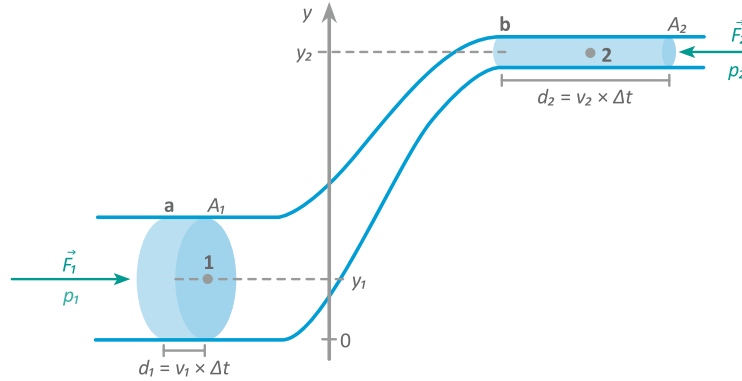


Figura 53 – Escoamento de um fluido num tubo com desnível e área de secção variável.

Sejam  $p_1$  e  $p_2$  as pressões nos pontos 1 e 2, cujas alturas, em relação a um plano horizontal de referência, são  $y_1$  e  $y_2$ , respetivamente.  $\vec{F}_1$  é a força de pressão exercida pelo fluido que chega ao ponto 1, e  $\vec{F}_2$  é a força de pressão exercida pelo fluido que já passou no ponto 2.

Considerando a Lei do trabalho-energia, e atendendo que atuam no fluido as forças  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  e o peso  $\vec{P}$ , pode escrever-se:

$$W_{\vec{F}_R} = \Delta E_c$$

$$W_{\vec{F}_1} + W_{\vec{F}_2} + W_{\vec{P}} = \Delta E_c$$

Sendo o peso do fluido uma força conservativa, então:  $W_{\vec{P}} = -\Delta E_p$ .

Substituindo e desenvolvendo, pode-se escrever

$$F_1 d_1 - F_2 d_2 - \Delta E_p = \Delta E_c$$

Relacionando a força com a pressão e a área,  $F = p A$  e substituindo,

$$p_1 A_1 d_1 - p_2 A_2 d_2 = \Delta E_c + \Delta E_p$$

Desenvolvendo a energia cinética e a energia potencial, vem

$$p_1 V_1 - p_2 V_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 + m g y_2 - m g y_1$$

Sendo  $\rho = \frac{m}{V}$  e substituindo  $m$ , pode-se escrever:

$$p_1 V_1 - p_2 V_2 = \frac{1}{2} \rho V_2 v_2^2 - \frac{1}{2} \rho V_1 v_1^2 + \rho V_2 g y_2 - \rho V_1 g y_1$$

Como o caudal é sempre o mesmo, então o volume que passa em 1 é igual ao que passa em 2:

$$V_1 = V_2$$

Pode simplificar-se e vem:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_2 - \rho g y_1$$

Ou ainda

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2$$

Esta expressão traduz a [Equação de Bernoulli](#) ou [Equação Fundamental da Hidrodinâmica](#).

Como ao longo de uma linha de corrente, 1 e 2 podem ser uns pontos quaisquer, então a [Equação de Bernoulli](#) também pode ser escrita como:

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = \text{constante}$$

No caso de um fluido em equilíbrio estático, as [velocidades](#),  $v_1$  e  $v_2$ , [são nulas](#) e então a equação reduz-se a:

$$p_1 + \rho g y_1 = p_2 + \rho g y_2$$

$$p_1 - p_2 = \rho g (y_2 - y_1)$$

que é a [Equação Fundamental da Hidrostática](#).

### Aplicações da Equação de Bernoulli

Os exemplos seguintes mostram as aplicações da Equação de Bernoulli em situações da vida quotidiana.

- [Sustentação de um avião](#)

As asas dos aviões têm uma forma e uma inclinação tal que o ar é obrigado a passar pela sua face superior com maior velocidade. A densidade das linhas de corrente é maior na parte de cima das asas.

De acordo com a equação de Bernoulli, na parte de cima das asas a velocidade é maior e portanto a pressão é menor.

Cria-se, assim, uma diferença de pressão entre a parte superior e a parte inferior das asas que origina uma força de sustentação, perpendicular e dirigida para cima.

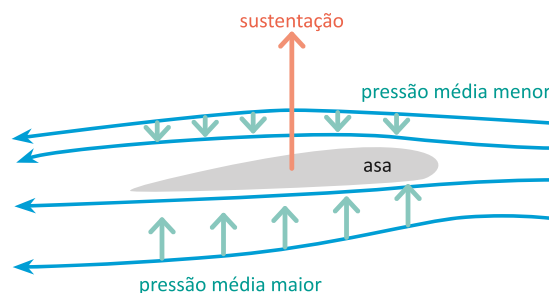


Figura 54 – Linhas de corrente indicando o escoamento de ar em torno de uma asa de avião.

- **Pulverizador**

Num pulverizador, apertando a bomba de borracha, cria-se um fluxo de ar num canal onde há um estrangulamento. Aí a velocidade do ar vai ser maior e, portanto, a pressão vai ser menor, o que obriga o líquido a subir no tubo.

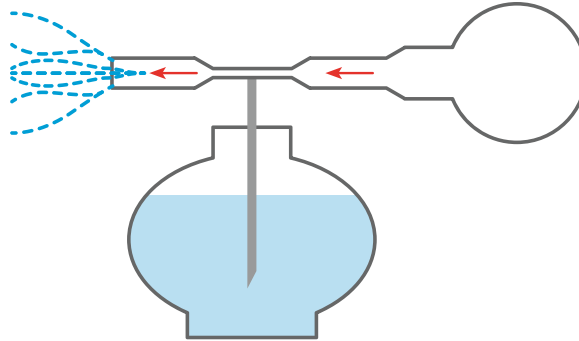


Figura 55 – Pulverizador.

- **Funcionamento de uma chaminé**

Na chaminé, quando o vento sopra, a pressão no topo é inferior à pressão no interior da casa, o que obriga o fumo a subir, pois a diferença de pressão cria um fluxo de ar para cima.

- **Velocidade de saída de um líquido por um orifício**

Num recipiente contendo um líquido abre-se uma torneira que existe na sua base. A velocidade de saída do líquido pelo orifício é obtida a partir da equação de Bernoulli.

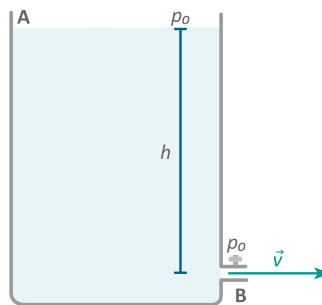


Figura 56 – Recipiente com abertura no fundo.

Nos pontos A e B, as pressões são iguais à pressão atmosférica:  $p_A = p_B = p_0$

Aplicando a equação de Bernoulli nos pontos A e B, tem-se:

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

Pela Equação da Continuidade,

$$A_A v_A = A_B v_B$$

Mas como a área da superfície B é muito menor do que a área de A, então a velocidade em B é muito maior do que a velocidade em A e pode-se mesmo considerar que  $v_A$  é nula.

Então,

$$\rho g h = \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

e a velocidade de saída do líquido em B é dada por

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

#### A saber:

A velocidade de escoamento da água através do orifício é igual à velocidade que teria se caísse em queda livre da altura  $h$ .

#### • Efeito Venturi

O tubo de Venturi é um tubo horizontal, dotado de um estrangulamento, que é aplicado numa canalização, conforme indica a figura 57.

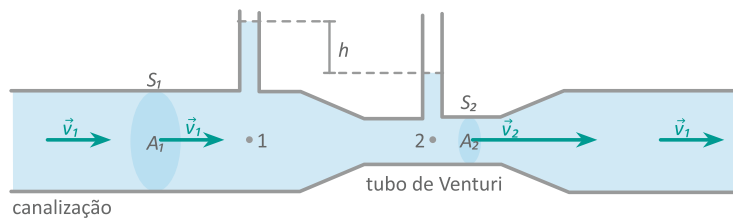


Figura 57 – Tubo de Venturi.

Este tubo é usado para [medir a velocidade de escoamento](#) de um fluido e o [caudal volumétrico](#), a partir da medida de pressões com manómetros.

Pela equação de Bernoulli,

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2$$

Como os pontos 1 e 2 estão à mesma altura, então,

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

ou

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

## Questões Resolvidas

1. Um tanque de área grande está cheio de água até à altura de 120 cm. Na base existe um orifício de  $4,0 \text{ cm}^2$  situado no fundo do tanque.

Calcule:

1.1. O valor da velocidade da água à saída deste orifício.

1.2. O volume de água que escoar num minuto.

**Resolução:**

1.1. A velocidade de saída é dada por:  $v = \sqrt{2gh}$

Substituindo os valores  $v = \sqrt{2 \times 10 \times 1,20}$

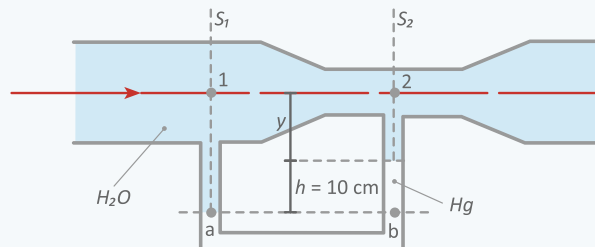
Obtem-se  $v = 4,9 \text{ m/s}$ .

1.2. Pela expressão do caudal  $\phi = A v$

Substituindo os valores  $\phi = 4,0 \times 10^{-4} \times 4,9 = 1,96 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$

Por minuto será  $19,6 \times 10^{-4} \times 60 = 0,12 \text{ m}^3/\text{min}$ .

2. No medidor de Venturi da figura seguinte, a área da secção 1 é  $20 \text{ cm}^2$  enquanto que a da secção 2 é  $10 \text{ cm}^2$ . O manómetro, cujo fluido manométrico é mercúrio ( $\rho_{\text{Hg}} = 13600 \text{ kg/m}^3$ ) é ligado entre as secções 1 e 2 e indica o desnível mostrado na figura. ( $\rho_{\text{água}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ ).



Determine o caudal volumétrico que passa no Venturi.

**Resolução:**

2. Pela Equação da Continuidade obtém-se uma relação entre as velocidades nos pontos 1 e 2 à mesma altura no fluido.

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$20 \times 10^{-4} v_1 = 10 \times 10^{-4} v_2 \Leftrightarrow v_1 = 0,5 v_2$$

Pela Equação Fundamental da Hidrostática aplicada aos pontos a e b, que estão à mesma altura no mercúrio,

$$p_a = p_1 + \rho_{\text{água}} g h + \rho_{\text{água}} g y$$

$$p_b = p_2 + \rho_{\text{mercúrio}} g h + \rho_{\text{água}} g y$$

Como  $p_a = p_b$

Vem  $p_1 - p_2 = 12,6 \times 10^3 \text{ Pa}$

Substituindo na Equação de Bernoulli,

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

Obtém-se  $v_2 = 5,8 \text{ m/s}$

E o caudal vai ser:

$$\varnothing = A v$$

$$\varnothing = 10 \times 10^{-4} \times 5,8$$

$$\varnothing = 5,8 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}.$$

#### 4 Força de resistência em fluidos. Coeficiente de viscosidade de um líquido

Tal como no movimento de um páraquedista, onde atua a força de resistência do ar, também um objeto, quando se move num líquido, sofre a ação de uma resistência ao seu movimento.

Essa força depende:

- da viscosidade do líquido;
- da forma e tamanho do objeto;
- do módulo da velocidade do corpo.

Para corpos pequenos e com baixa velocidade, a força de resistência varia linearmente com a velocidade e tem sentido oposto a esta,

$$\vec{F}_{res} = -k \vec{v}$$

sendo o seu módulo

$$F_{res} = k v$$

A constante  $k$  depende da forma e das dimensões do objeto e da natureza do meio onde o corpo se move.

Um fluido muito viscoso oferece uma maior força de resistência ao movimento de um corpo no seu interior.

No caso de uma pequena esfera de raio  $r$ , movendo-se num líquido muito viscoso,  $k$  é dado por

$$k = 6 \pi r \eta$$

onde  $\eta$  é o coeficiente de viscosidade do fluido que tem unidades de pressão vezes tempo.

O módulo da **força de resistência**, é dado por

$$F_{res} = 6 \pi r \eta v$$

A **velocidade terminal** é atingida quando for nula a resultante das forças que atuam na esfera e o movimento é, então, uniforme.

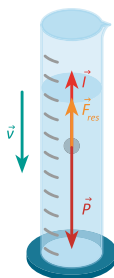


Figura 58 – Pequena esfera metálica em queda num líquido.

As forças são o peso da esfera,  $\vec{P}$ , a força de resistência ao movimento,  $\vec{F}_{res}$ , e a impulsão,  $\vec{I}$ , e portanto se atinge a velocidade terminal,

$$P = F_{res} + I$$

## Atividade Prático-Laboratorial

### APL B-2.1: Coeficiente de viscosidade de um líquido

**Questão-problema:** Como determinar a viscosidade de um líquido?

**Objectivo:** Determinação do valor da viscosidade de um líquido a partir da velocidade terminal de várias esferas no seu interior.

**Questões pré-laboratoriais:**

1. Quais as forças que atuam numa esfera de metal em queda no interior de um líquido viscoso?
2. Uma vez atingida a velocidade terminal, o movimento da esfera passa a ser uniforme. Mostre que o valor da velocidade terminal da esfera pode ser determinado pela expressão:

$$v_{terminal} = \frac{2(\rho_{esfera} - \rho_{liquido})g}{9\eta} r^2$$

3. Como determinar experimentalmente a massa volúmica do fluido e do metal?

**Recursos:**

- Proveta grande cheia com glicerina
- Craveira
- Esferas de metal de diâmetros diferentes
- Proveta pequena
- Cronómetro
- Termómetro

